Projekty - Úvod do funkcionální analýzy

Projekt č. 1.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažte, že prostor

$$C(\langle a, b\rangle) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ f \text{ je spojitá na } D(f) = \langle a, b\rangle\}$$

s metrikou

$$\rho(f, g) = \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f(x) - g(x)|$$

je úplný.

Projekt č. 2.

Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory. Dokažte, že zobrazení $T : X \to Y$ je spojité ***právě tehdy***, když pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí

$$T(\overline{A}) \subset \overline{T(A)}.$$

Připomeňme, že zobrazení $T : X \to Y$ se nazývá spojité, jestliže pro každou posloupnost (x_n) prvků z X takovou, že $x_n \overset{(\text{v } X)}{\to} x_0$ $(\in X)$, platí $T(x_n) \overset{(\text{v } Y)}{\to} T(x_0)$.
Můžete rovněž využít toho, že zobrazení $T : X \to Y$ je spojité právě tehdy, když vzor libovolné otevřené (uzavřené) množiny $M \subset Y$ je otevřená (uzavřená) množina.

Projekt č. 3.

Pomocí Banachovy věty o pevném bodě dokažte Picardovu–Lindelöfovu větu (věta o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy, viz skriptum „Úvod do funkcionální analýzy“ – strana 15–17). Je třeba jednotlivé kroky důkazu pochopit.

Projekt č. 4.

Dokažte Cantorovu větu (viz skriptum „Úvod do funkcionální analýzy“ – strana 18). Poté ukažte na příkladech, že žádný předpoklad této věty nelze vynechat.

Projekt č. 5.

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body a, b, kde $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Uvažujme metrické prostory (I, ρ) a $(\mathbb{R}, \rho)$, kde $\rho(x, y) = |x - y|$, a zobrazení $f : I \to \mathbb{R}$ mezi těmito prostory. Předpokládejme dále, že funkce f má na intervalu I derivaci. Pokud $a \in I$ (popř. $b \in I$), myslíme symbolem $f'(a)$ (popř. $f'(b)$) číslo $f'_+(a)$ (popř. $f'_-(b)$).

Ukažte, že zobrazení f je kontraktivní, tzn.

$$(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in I) : \ \rho\big(f(x), f(y)\big) \leq q\rho(x, y),$$

právě tehdy, když platí

$$\sup_{x \in I} |f'(x)| < 1.$$

Projekt č. 6.

Dokažte toto zobecnění Banachovy věty o pevném bodě.

Nechť $T : X \to X$ je zobrazení úplného metrického prostoru X do sebe. Nechť dále existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ krát provedené složení}}$ je kontrakce. Pak existuje právě jeden prvek $x \in X$ splňující $T(x) = x$ (pevný bod zobrazení T).

Udejte také konkrétní příklad metrického prostoru X a ***nekontraktivního*** zobrazení $T : X \to X$ takového, aby některá jeho mocnina T^n už byla kontraktivní.

Projekt č. 7.

Nechť $p \in \langle 1, +\infty)$. Dokažte, že prostor $\ell^p = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$ s normou $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ je úplný.

Projekt č. 8.

Buď (X, ρ) metrický prostor. Množina $M \subset X$ se nazývá souvislá, jestliže M ***nelze*** napsat jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin. Připomeňme, že množiny A, B se nazývají oddělené, platí-li $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Dokažte, že sjednocení libovolného (i nekonečného) počtu souvislých množin, které mají neprázdný průnik, je souvislá množina.

Platí podobné tvrzení i pro průnik souvislých množin?

Projekt č. 9.

Uvažujme metrický prostor $(\mathbb{R}, \rho)$, kde $\rho(x, y) = |x - y|$. Rozhodněte a řádně zdůvodněte, zda následující množiny jsou husté v $\mathbb{R}$:

- $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}\colon\ m, n \in \mathbb{N}\}$;
- $B = \{m - n\colon\ m, n \in \mathbb{N}\}$;
- $C = \{m^2 - n^2\colon\ m, n \in \mathbb{N}\}$;
- $D = \{\ln m - \ln n\colon\ m, n \in \mathbb{N}\}$.

Připomeňme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je hustá v $\mathbb{R}$, platí-li $\overline{M} = \mathbb{R}$.

Projekt č. 10.

Uvažujme množinu

$$X = \big\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\colon\ x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}\big\}$$

všech posloupností reálných čísel.

Pro libovolné $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ a $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$, $x \neq y$, definujme

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{kde } \lambda \text{ je nejmenší index takový, že } x_\lambda \neq y_\lambda.$$

V případě, že $x = y$, položíme $\rho(x, y) = 0$.

Znamená to např., že vzdálenost posloupnosti $(1, 2, 4, 8, 16, 31, \dots)$ od posloupnosti $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$ je $\frac{1}{6}$.

Dokažte, že (X, ρ) je metrický prostor. Rozhodněte a řádně zdůvodněte, zda je tento metrický prostor úplný.

Projekt č. 11.

Uvažujme metrický prostor (X, ρ). Dokažte následující tvrzení:

- $(\forall A, B \subset X)\colon\ \operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;
- $(\forall A, B \subset X)\colon\ \operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$;
  Na konkrétním příkladě poté ukažte, že obecně neplatí rovnost
  $\operatorname{int}(A \cup B) = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.
- $(\forall A \subset X)\colon\ \partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$;
- $(\forall A \subset X)\colon\ \overline{A} = X \setminus \operatorname{ext} A$.

Projekt č. 12.

Uvažujme normovaný lineární prostor X. Připomeňme, že množina $M \subset X$ se nazývá kompaktní, jestliže lze z každé posloupnosti (x_n), $x_1, x_2, \dots \in M$, vybrat podposloupnost (x_{k_n}), která konverguje v M.

Nechť $A, B \subset X$ jsou dvě uzavřené množiny takové, že alespoň jedna z nich je kompaktní. Dokažte, že množina

$$A + B \overset{\text{def}}{=} \{a + b\colon\ a \in A, b \in B\}$$

je uzavřená. Dále na konkrétním příkladě ukažte, že předpoklad kompaktnosti nelze vynechat.

Projekt č. 13.

Uvažujme normovaný lineární prostor X. Připomeňme, že množina $M \subset X$ se nazývá kompaktní, jestliže lze z každé posloupnosti (x_n), $x_1, x_2, \dots \in M$, vybrat podposloupnost (x_{k_n}), která konverguje v M.

Nechť $A, B \subset X$ jsou dvě uzavřené disjunktní množiny takové, že alespoň jedna z nich je kompaktní. Dokažte, že

$$\operatorname{dist}(A, B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{\|a - b\|\colon\ a \in A, b \in B\} > 0.$$

Na konkrétním příkladě poté ukažte, že předpoklad kompaktnosti nelze vynechat.

Projekt č. 14.

Nechť $p \in \langle 1, +\infty)$. Dokažte, že prostor $\ell^p = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, \dots)\colon\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\right\}$
s normou $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ je separabilní,
zatímco prostor $\ell^\infty = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, \dots)\colon\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\right\}$
s normou $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ separabilní není.

Připomeňme, že prostor je separabilní, pokud v něm existuje nějaká spočetná hustá podmnožina.

Návod: V první části uvažujte (spočetnou) množinu všech posloupností racionálních čísel s konečným počtem nenulových prvků a ve druhé (nespočetnou) množinu všech možných posloupností nul a jedniček.

Projekt č. 15.

Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $M \subset X$. Dokažte, že platí ekvivalence

$$M \text{ je kompaktní } \iff M \text{ je uzavřená a totálně omezená.}$$

Množinu M přitom nazveme totálně omezenou, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $M_\varepsilon \subset X$ taková, že pro každé $x \in M$ platí $\operatorname{dist}(x, M_\varepsilon) < \varepsilon$.
(M_ε se nazývá ε–síť množiny M.)

Najděte konkrétní příklad metrického prostoru (X, ρ) a množiny $M \subset X$, která je omezená, ale není totálně omezená.

Projekt č. 16.

Nechť H je Hilbertův prostor a P jeho uzavřený podprostor. Dokažte, že

$$(P^\perp)^\perp = P.$$

Připomeňme, že pro $M \subset H$ definujeme

$$M^\perp = \{x \in H\colon \text{ pro každé } m \in M \text{ platí } (x, m) = 0\}.$$

Na konkrétním příkladu ukažte, že předpoklad uzavřenosti nelze vypustit.

Návod: Jedna inkluze je snadná, pro důkaz druhé použijte větu o ortogonální projekci.

Projekt č. 17.

Uvažujme normovaný prostor $\ell^\infty = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, \dots)\colon \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$ s normou $\|x\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ (prostor všech reálných omezených posloupností). Dokažte, že podmnožina $M = \{x \in \ell^\infty\colon \lim x_n = 0\}$ je uzavřená a podmnožina $N = \left\{ x \in \ell^\infty\colon \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$ není uzavřená.

Projekt č. 18 (inspirováno sbírkou příkladů prof. Luboše Picka)**.**

Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$. Definujme břeh množiny A předpisem $B(A) = A \cap \partial A$. Dokažte, že platí vztahy

$$\partial A = B(A) \cup B(X \setminus A), \qquad B(A) \cap B(X \setminus A) = \emptyset, \qquad B(B(A)) = B(A).$$

Charakterizujte (a vše řádně zdůvodněte) uzavřené a otevřené množiny pomocí výše definovaného břehu množiny.

Projekt č. 19 (inspirováno sbírkou příkladů prof. Luboše Picka).

Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{pro} \quad x \neq 0,\, y = 0, \\ \frac{1}{|y|} & \text{pro} \quad y \neq 0,\, x = 0, \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{pro} \quad x \neq 0,\, y \neq 0,\, x \neq y, \\ 0 & \text{pro} \quad x = y. \end{cases}$$

Ověřte, že $(\mathbb{R}, \rho)$ je metrický prostor. Charakterizujte všechny kompaktní množiny v tomto metrickém prostoru. Na základě nalezené charakterizace určete, které z množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$ jsou kompaktní.

Projekt č. 20 (inspirováno sbírkou příkladů prof. Luboše Picka).

Uvažujme metrický prostor (P, ρ), kde

$$P = \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \rho(m,n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|.$$

Ověřte, že ρ je skutečně metrika. Dále definujme zobrazení $T\colon P \to P$ předpisem

$$T(n) = n^2.$$

Dokažte, že zobrazení T je kontrakce, která nemá žádný pevný bod. Na základě výše uvedených skutečností rozhodněte, zda je prostor (P, ρ) úplný. Podejte i přímý důkaz úplnosti / neúplnosti prostoru (P, ρ).

Projekt č. 21.

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Připomeňme, že tento prostor se nazývá souvislý, jestliže X nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin. Množinu $M \subset X$ nazveme obojetnou, je-li uzavřená a současně otevřená. Je zřejmé, že v libovolném metrickém prostoru (X, ρ) jsou množiny $\emptyset$ a X obojetné (proč?).

Dokažte, že metrický prostor (X, ρ) je souvislý, právě když $\emptyset$ a X jsou jediné obojetné množiny v prostoru (X, ρ).

Dále ukažte, že množina $M \subset X$ je obojetná, právě když platí $\partial M = \emptyset$.

Projekt č. 22.

Uvažujme prostor $\ell^\infty = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots)\colon \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$ s normou $\|x\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ a množinu $\ell^1 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots)\colon \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty \right\}$.

Dokažte, že ℓ^1 je vektorový podprostor prostoru ℓ^∞. Dále ukažte, že podprostor ℓ^1 není uzavřený v ℓ^∞. Jak by vypadal uzávěr množiny ℓ^1 v prostoru ℓ^∞?

Projekt č. 23.

Uvažujme prostor $C(\langle 0,1\rangle) = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon\ f$ je spojitá na $D(f)=\langle 0,1\rangle\}$ s normou $\|f\| = \max\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x)|$.

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ definujme funkcionál $F_n\colon C(\langle 0,1\rangle)\to\mathbb{R}$ předpisem

$$F_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Dále uvažujme funkcionál $F\colon C(\langle 0,1\rangle)\to\mathbb{R}$ definovaný předpisem

$$F(f) = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokažte, že pro každé $f\in C(\langle 0,1\rangle)$ platí $|F_n(f)-F(f)|\to 0$.
Dále ukažte, že $\underbrace{\|F_n - F\|}_{\text{norma v duálu}} \not\to 0$, tzn. $F_n\not\to F$ v $(C(\langle 0,1\rangle))^*$.

Projekt č. 24.

Nechť $(x_1,x_2,x_3,\dots)$ je posloupnost navzájem kolmých prvků Hilbertova prostoru H. Dokažte následující ekvivalenci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{konverguje (v } H) \quad\iff\quad \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2 \quad \text{konverguje (v } \mathbb{R}).$$

Na konkrétním příkladu ukažte, že bez předpokladu vzájemné kolmosti výše uvedená ekvivalence neplatí. Platí (bez předpokladu kolmosti) aspoň jedna implikace?

Projekt č. 25.

Nechť $(X,\|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $K\subset X$ je konvexní množina. Dokažte, že množiny $\operatorname{int} K$ a $\overline{K}$ jsou rovněž konvexní.

Připomeňme, že množina $M\subset X$ se nazývá konvexní, pokud platí následující podmínka:

$$(\forall x,y\in M)(\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \lambda,\mu\ge 0,\ \lambda+\mu=1)\colon\ \lambda x+\mu y\in M.$$

(To znamená, že s každými dvěma body z M patří do M i celá úsečka spojující tyto body.)

Projekt č. 26.

Nechť (X, ρ) je metrický prostor.

Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující následující podmínky:

- $f(0) = 0$;
- f je neklesající na intervalu $\langle 0, +\infty)$;
- f je konkávní na intervalu $\langle 0, +\infty)$;
- f není na intervalu $\langle 0, +\infty)$ identicky nulová, tj. $(\exists t_0 > 0)\colon f(t_0) \neq 0$.

Dokažte, že zobrazení $\sigma\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\sigma(x, y) = f\big(\rho(x, y)\big)$$

je metrika na X.

Poznámka: Pokud bychom volili $f(t) = t$, dostali bychom $\sigma(x, y) = \rho(x, y)$.

Projekt č. 27.

Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ je jeho uzavřený podprostor. Dokažte, že $\operatorname{Lin}(Y \cup \{x_0\})$, kde $x_0 \in X$ je pevně daný prvek, je rovněž uzavřený podprostor prostoru X.

Projekt č. 28.

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je reflexivní prostor a $f \in X^*$. Víme, že

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\}. \qquad \text{(definice)}$$

Dokažte, že

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\},$$

tzn. že existuje prvek $x_0 \in X$, $\|x_0\| \leq 1$, takový, že $\|f\| = |f(x_0)|$.

Nápověda: Užijte důsledek Hahnovy–Banachovy věty (skriptum ÚFA, důsledek 5.18).

Pomocí dokázaného tvrzení dále ukažte, že prostor

$$\ell^1 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty \right\}, \qquad \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

není reflexivní.