Test1 - vzorové zadání

1. Ukažte, že nelineární rovnice $u_t = u_x^2 + u_{xx}$ může být převedena na difůzní rovnici $u_t = u_{xx}$ pomocí transformace $w = \mathrm{e}^u$.

   Řešení: Dle nápovědy položíme $w(t,x) = \mathrm{e}^{u(t,x)}$ Pak:

$$
\begin{aligned}
w_t(t,x) &= \mathrm{e}^{u(t,x)} u_t(t,x) \\
w_x(t,x) &= \mathrm{e}^{u(t,x)} u_x(t,x) \\
w_{xx}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{u(t,x)}\right) u_x(t,x) + \mathrm{e}^{u(t,x)} \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x(t,x)\right) \\
&= \mathrm{e}^{u(t,x)}\left(u_x^2(t,x) + u_{xx}(t,x)\right)
\end{aligned}
$$

   A tedy

$$
w_{xx}(t,x) = \mathrm{e}^{u(t,x)}\left(u_x^2(t,x) + u_{xx}(t,x)\right) = \mathrm{e}^{u(t,x)} u_t(t,x) = w_t(t,x)
$$

---

2. Nalezněte obecné řešení rovnice $xu_x + yu_y = 0$

   Řešení:

   (a) Metoda charakteristik:

$$
\text{charakteristický systém:} \qquad
\begin{aligned}
x' &= x \\
y' &= y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y\mathrm{r}_1 - x\mathrm{r}_2: \qquad x'y - y'x = 0 \;\Rightarrow\; 0 &= \frac{x'}{x} - \frac{y'}{y} = (\ln(x) - \ln(y))' \\
k_1 &= \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \\
k_2 = \mathrm{e}^{k_1} &= \frac{x}{y} =: \psi(x,y) \\
u(x,y) &= F\left(\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}
$$

   Je vidět, že nalezené řešení jení ve vhodném tvaru, jelikož když v zadání vyměníme souřadnice x a y, tak se zadaná PDR nezmění, kdežto řešení na volbě souřadnic závisí (nelze dělit nulou, $y \neq 0$ a $x \neq 0$ jsou různá tvrzení). Vše se vyjasní, když si uvědomíme, že charakteristické křivky jsou všechny přímky $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$ procházející nulou (také $y = 0$).
   Pro zájemce: Pokud bychom se zajímali o řešení na celém $\mathbb{R}^2$, tak takové řešení je pouze $u(x,y) = k$, $k \in \mathbb{R}$, protože je řešení konstantní na všech přímkách procházejících bodem $(0,0)$, tedy všude

v $\mathbb{R}^2$ má hodnotu $u(0,0)$. Když odebereme nějaké okolí bodu $(0,0)$ tak můžeme zapsat řešení jako

$$u(x,y) = G\left(\arg_{(-\pi,pi\rangle}(x,y)\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus B_\varepsilon(0,0),$$

kde $\arg_{(-\pi,pi\rangle}(x,y)$ je funkce, která dvojici (x,y) přiřadí úhel bodu (x,y) od osy x měřený proti otáčení hodinových ručiček v intervalu $(-\pi,\pi\rangle$ a G je periodická $C^2(\mathbb{R})$ funkce s periodou π taková, že $G''(0) = G''(\pi)$.

(b) Metoda charakteristických souřadnic, podrobněji viz [DraHol2011], 3.2.2

V tomto příkladu nemá užití metody charakteristických souřadnic praktický význam, uveďme si ji ale také, a to z důvodu, že se nám bude hodit v případě lineární PDR prvního řádu se členem bez derivace, tj.

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + cu(x,y) = f(x,y).$$

Chceme provést substituci, kdy jedna ze souřadnic (s) "kopíruje" charakteristické křivky, tj. řešení bude konstantní vzhledem k nové souřadnici s. Díky řešení metodou charakteristik víme, že charakteristické křivky lze zapsat implicitním vztahem $k_2 = xy^{-1}$. Položíme tedy

$$\begin{aligned}
\text{substituce:} \qquad s &= xy^{-1} \\
t &= y \\
u(x,y) &= u^\star\left(s(x,y), t(x,y)\right) \\
u_x &= u_s^\star s_x + u_t^\star t_x = u_s^\star y^{-1} \\
u_y &= u_s^\star s_y + u_t^\star t_y = u_s^\star x(-y^{-2}) + u_t^\star \\
0 = \left(xu_x + yu_y\right)(s,t) &= \left(\frac{x}{y}u_s^\star + y\left(u_s^\star x(-y^{-2}) + u_t^\star\right)\right)(s,t) \\
&= \left(yu_t^\star\right)(s,t) = tu_t^\star(s,t) \\
u_t^\star(s,t) = 0 \;\Rightarrow\; u^\star(s,t) &= F(s) \;\Rightarrow\; u(x,y) = F(xy^{-1})
\end{aligned}$$

3. Rozhodněte, v kterých oblastech roviny xy je rovnice

$$\sin(xy)u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

eliptická, parabolická, hyperbolická.

<u>Řešení:</u> Přepíšeme PDR a získáme tak matici kvadratické formy:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(xy)u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} - \cos(x)u_y \\ &= \left(\begin{bmatrix} \partial_x & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(xy) & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\cos(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \right) (u) \end{aligned}$$

Chceme určit znaménka vlastních čísel matice a v $\mathbb{R}^2$ nám k tomu stačí znát znaménko determinantu:

$$\det \left(\begin{bmatrix} \sin(xy) & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right) = \sin(xy) - 9 < 0$$

Vlastní čísla mají opačná znaménka, zadaná PDR je tedy hyperbolická v celém $\mathbb{R}^2$.

References

[DraHol2011] P. Drábek, G. Holubová: Parciální diferenciální rovnice, projekt MI21, mi21.vsb.cz/modul/parcialni-diferencialni-rovnice