Test2 - vzorové zadání

1. (5b) Řešte Fourierovou metodou

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= u_{xx} && x \in (0,1),\ t \in \mathbb{R}^+ \\
u(0,t) &= u(1,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+ \\
u(x,0) &= \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) && x \in (0,1)
\end{aligned}
$$

kde

$$\varphi(x) = \sin(\pi x) + 3\sin(2\pi x) - \sin(3\pi x), \qquad \psi(x) = 1.$$

Řešení: Víme (pokud si vztah nepamatujete, nezoufejta a během cca 10 minut si jej odvoďte), že

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)] \sin(n\pi x) \\
\varphi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \\
\psi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sin(n\pi x)
\end{aligned}
$$

A tedy $(A_n) = (1, 3, -1, 0, \dots, 0, \dots)$ a

$$B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \psi(x) \sin(n\pi x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{(n\pi)^2} [-\cos(n\pi x)]_0^1 = \frac{2}{(n\pi)^2} (1 - (-1)^n)$$

$(B_n) = (\frac{4}{\pi^2}, 0, \frac{4}{9\pi^2}, \dots, \frac{4}{n^2\pi^2}, 0, \dots)$

Řešením je funkce

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \cos(\pi t)\sin(\pi x) + 3\cos(2\pi t)\sin(2\pi x) - 1\cos(3\pi t)\sin(3\pi x) + \\
+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)^2\pi^2} \sin((2m-1)\pi t)\sin((2m-1)\pi x)
\end{aligned}
$$

---

2. (3b) Transformujte PDR na homogenní okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0 & x \in (0,l),\ t \in \mathbb{R}^+ \\ u_x(0,t) &= g_1(t),\ u_x(l,t) + hu(l,t) = g_2(t) & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \varphi(x) & x \in (0,1) \end{aligned}$$

Řešení: $u(x,t)$ hledejme ve tvaru $v(x,t)+w(x,t)$ tak, aby $v(x,t)$ splňovala okrajové podmínky a měla co "nejjednodušší" tvar

$$\begin{aligned} v(x,t) &= A(t)\left(1-\frac{x}{l}\right) + B(t)\frac{x}{l} \\ v_x(0,t) &= \frac{1}{l}\left(B(t)-A(t)\right) = g_1(t) \\ v_x(l,t) + hv(l,t) &= \frac{1}{l}\left(B(t)-A(t)\right) + hB(t) = g_2(t) \end{aligned}$$

a tedy můžeme zjistit koeficienty $A(t)$ a $B(t)$:

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{1}{h}\left(g_2(t)-g_1(t)\right) \\ A(t) &= B(t) - lg_1(t) = \frac{1}{h}g_1(t) - \left(l+\frac{1}{h}\right)g_2(t) \\ v(x,t) &= \left(\frac{1}{h}g_1(t) - \left(l+\frac{1}{h}\right)g_2(t)\right)\left(1-\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{h}\left(g_2(t)-g_1(t)\right)\frac{x}{l}. \\ &= g_1(t)\frac{1}{h}\left(1-\frac{2x}{l}\right) + g_2(t)\frac{1}{h}\frac{x}{l} \end{aligned}$$

Úloha pro w pak bude

$$\begin{aligned} w_t - kw_{xx} &= -\left(v_t - kv_{xx}\right) = -v_t \\ &= -g_1'(t)\frac{1}{h}\left(1-\frac{2x}{l}\right) - g_2'(t)\frac{1}{h}\frac{x}{l} & x \in (0,l),\ t \in \mathbb{R}^+ \\ w_x(0,t) &= 0,\ w_x(l,t) + hw(l,t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ w(x,0) &= \varphi(x) - v(x,0) \\ &= \varphi(x) - \left(g_1(0)\frac{1}{h}\left(1-\frac{2x}{l}\right) + g_2(0)\frac{1}{h}\frac{x}{l}\right) & x \in (0,1) \end{aligned}$$

---

3. (4b) Separujte následující PDR

$$u_t = ku_{xx} - mu_x + u$$

na dvě ODR. Najděte λ_n v případě, že $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

Řešení: Hledáme řešení ve tvaru $u(x,t) = X(x)T(t)$ a tedy

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) &= kx''(x)T(t) - mX'(x)T(t) + X(x)T(t) \\ \frac{T' - T}{kT}(t) &= \frac{X'' - \frac{m}{k}X'}{X}(x) = -\lambda \end{aligned}$$

PDR jsme rozdělili na dvě ODR

$$\begin{aligned} X'' - \frac{m}{k}X' + \lambda X = 0 &\wedge X(0) = X(1) = 0 \\ T' + (k\lambda - 1)T = 0 & \end{aligned}$$

Pokračujme řešením první ODR, jejíž charakteristický polynom je

$$\xi^2 - \frac{m}{k}\xi + \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \xi \in \begin{cases} \left\{ \frac{m}{k} - \sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)^2 - 4\lambda};\ \frac{m}{k} + \sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)^2 - 4\lambda} \right\} & \lambda \leq \left(\frac{m}{2k}\right)^2 \\ \left\{ \frac{m}{k} - i\sqrt{4\lambda - \left(\frac{m}{k}\right)^2};\ \frac{m}{k} + i\sqrt{4\lambda - \left(\frac{m}{k}\right)^2} \right\} & \lambda > \left(\frac{m}{2k}\right)^2 \end{cases}$$

a řešení je tedy

$$X(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\left(\frac{m}{k} - \sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)^2 - 4\lambda}\right)x} + B\mathrm{e}^{\left(\frac{m}{k} + \sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)^2 - 4\lambda}\right)x} & \lambda \leq \left(\frac{m}{2k}\right)^2 \\ \mathrm{e}^{\frac{m}{k}x}\left[A\cos\left(x\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)^2 - 4\lambda}\right) + B\sin\left(x\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)^2 - 4\lambda}\right)\right] & \lambda > \left(\frac{m}{2k}\right)^2 \end{cases}$$

V případě, že $\lambda \leq \left(\frac{m}{2k}\right)^2$ by bylo $X(x) = 0$ a má smysl se tedy zabývat pouze případem $\lambda > \left(\frac{m}{2k}\right)^2$. Potom

$$\begin{aligned} 0 &= X(0) = A \\ 0 &= X(1) = B\sin\left(\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)^2 - 4\lambda}\right) \end{aligned}$$

a hledáme tedy $\lambda_n > 0$ (chceme aby $X(x) \neq 0$ a tedy $B \neq 0$) taková, aby $\sin\left(\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)^2 - 4\lambda_n}\right) = 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{4\lambda_n - \left(\frac{m}{k}\right)^2} &\in \{n\pi \mid n \in \mathbb{N}\} \\ 4\lambda_n - \left(\frac{m}{k}\right)^2 &\in \left\{ (n\pi)^2 \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \\ \lambda_n &\in \left\{ \frac{(kn\pi)^2 + (m)^2}{4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

---

4. (3b) Řešte rovnici

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x \in (0,a),\ y \in (0,b)$$

$$\begin{aligned} u_x(0,y) &= -a & \qquad u_x(a,y) &= 0 \\ u_y(x,0) &= b & \qquad u_y(x,b) &= 0 \end{aligned}$$

tak, že řešení hledejte ve tvaru polynomu 2. stupně v proměnných x a y.

Řešení: Nechť tedy $u(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \varphi$, $(x,y) \in (0,a) \times (0,b)$. Pak

$$\begin{aligned} 0 = u_{xx} + u_{yy} &= \alpha + \gamma & &\Rightarrow \gamma = -\alpha \\ -a = u_x(0,y) &= \beta y + \delta & &\Rightarrow \beta = 0 \wedge \delta = -a \\ b = u_y(x,0) &= \beta x + \varepsilon & &\Rightarrow \varepsilon = b \\ 0 = u_x(a,y) &= 2\alpha a + \beta y + \delta & &\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ 0 = u_y(x,b) &= \beta x + 2\gamma b + \varepsilon & &\Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2} = -\alpha \end{aligned}$$

Proto tedy

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - ax + by + \varphi.$$

References

[DraHol2011] P. Drábek, G. Holubová: Parciální diferenciální rovnice, projekt MI21, mi21.vsb.cz/modul/parcialni-diferencialni-rovnice