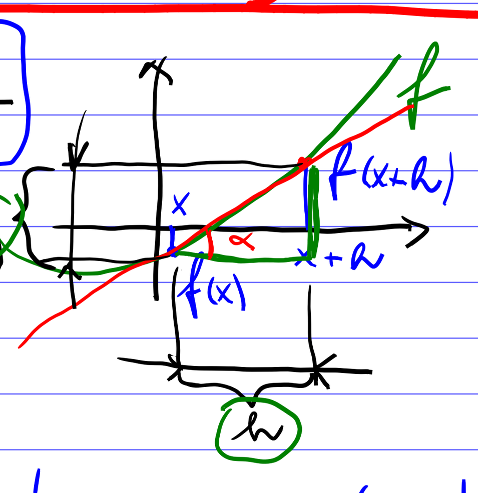
NUMERICKÁ DERIVACE

$$\boxed{f'(x) \stackrel{def}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Definice derivace $f(x+h)-f(x)$



VZORCE PRO NUMERICKÝ ODHAD („VÝPOČET") DERIVACE

1. Derivováním interpolačního polynomu (v tomto kurzu NE)
2. Odvozením z Taylorova rozvoje

A Dvoubodová schémata pro první derivaci

Pro $h>0$:
$$f(x+h) = f(x) + h\cdot f'(x) + (h^2/2) f''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x, x+h)$$
$$f(x-h) = f(x) - h\cdot f'(x) + (h^2/2) f''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x-h, x)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}} - \frac{h}{2} f''(\xi_1)$$
Pravá poměrná diference

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{2}} + \frac{h}{2} f''(\xi_2)$$
Levá poměrná diference

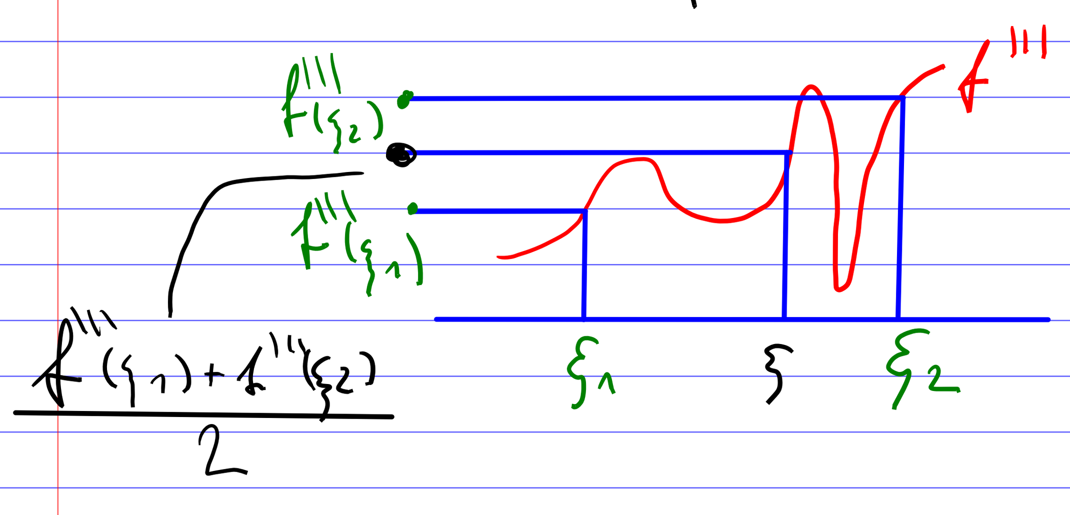
B Tříbodové schéma pro první derivaci

(v_1) $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + (h^2/2) f''(x) + (h^3/6) f'''(\xi_1)$

(v_2) $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + (h^2/2) f''(x) - (h^3/6) f'''(\xi_2)$

$(v_1)-(v_2)$:
$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}} - \underbrace{\frac{h^2}{12}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right]}_{\frac{h^2}{6} f'''(\xi)}, \quad \xi \in (x-h, x+h)$$

Centrální poměrná diference



$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$$

C Tříbodové schéma pro druhou derivaci

(v_1) $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(iv)}(\xi_1)$

(v_2) $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(iv)}(\xi_2)$

$(v_1)+(v_2)$:
$$\boxed{f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}} - \underbrace{\frac{h^2}{24}\left[f^{(iv)}(\xi_1)+f^{(iv)}(\xi_2)\right]}_{\frac{h^2}{12} f^{(iv)}(\xi)}, \quad \xi \in (x-h, x+h)$$

Příklad: Pomocí uvedených schémat odhadněte $\sin'(1), \sin''(1)$, když pracujeme s krokem a) $h = 0.1$ b) $h = 0.01$

Řešení: Nejprve „přesně" $\sin'(1) = \cos(1) \doteq 0.54030$, $\sin''(1) = -\sin(1) \doteq -0.84147$

Dále využijeme: $\boxed{|\sin^{(n)}(\alpha)| \le 1}$ $\forall \alpha \in R$

			a	b
$\sin'(1)$ A+	$[\sin(1+h)-\sin(1)]/h$	$\pm \frac{h}{2}\lvert\sin''(\xi_1)\rvert$	„=" 0.49736 ± 0.05	0.53608 ± 0.005
A−	$[\sin(1)-\sin(1-h)]/h$	$\pm \frac{h}{2}\lvert\sin''(\xi_2)\rvert$	„=" 0.58144 ± 0.05	0.54450 ± 0.005
B	$[\sin(1+h)-\sin(1-h)]/(2h)$	$\pm \frac{h^2}{6}\lvert\sin'''(\xi)\rvert$	„=" 0.53940 ± 0.0016	0.54029 ± 0.000016
$\sin''(1)$ C	$[\sin(1+h)-2\sin(1)+\sin(1-h)]/h^2$	$\pm \frac{h^2}{12}\lvert\sin^{(iv)}(\xi)\rvert$	„=" -0.84077 ± 0.00083	-0.84146 ± 0.0000008

RICHARDSONOVA EXTRAPOLACE

Mějme $A^* = A(h) + c_0 h^{m_0} + \underbrace{c_1 h^{m_1} + c_2 h^{m_2} + \dots}_{O(h^{m_1})}$, (R_1) $m_0 < m_1 < \dots$

(například Taylorův rozvoj) pro parametr $h \to 0$,

tedy také $A^* = A\left(\frac{h}{t}\right) + c_0\left(\frac{h}{t}\right)^{m_0} + O(h^{m_1})$ (R_2)

pak: $\frac{t^{m_0}(R_2)-(R_1)}{t^{m_0}-1}$: $A^* = \frac{t^{m_0} A\left(\frac{h}{t}\right) - A(h)}{t^{m_0}-1} + O(h^{m_1})$

Pokud jsme k odhadu A^* používali $\boxed{A(h)}$ [s chybou $O(h^{m_0})$],

můžeme nyní použít $\boxed{\frac{t^{m_0} A\left(\frac{h}{t}\right) - A(h)}{t^{m_0}-1}}$ [s chybou $O(h^{m_1})$]

Příklad Využijte Richardsonovu extrapolaci k nalezení $O(h^5)$ $O(h^4)$ normy pro $f'(x)$

Využijeme
$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x) - \underbrace{\frac{h^4}{5!}\left[f^{(5)}(\xi_1) - f^{(5)}(\xi_2)\right]}_{O(h^4)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + h\cdot f'(x) + \frac{h}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(\xi_1) \\ f(x-h) &= f(x) - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad \xi_2 \end{aligned}}$$

Aplikujme Richardsonovu extrapolaci s

$A(h) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, $A^* = f'(x)$, $m_0 = 2$, $m_1 = 4$, $t = \frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $\frac{h}{t} = 2h$

$$\frac{t^{m_0} A\left(\frac{h}{t}\right) - A(h)}{t^{m_0}-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 [f(x+2h) - f(x-2h)]/(2\cdot 2h) - [f(x+h)-f(x-h)]/(2h)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{4}} \cdot \left[\frac{1}{4} \underbrace{\left(\frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{4h}\right)}_{D_c f(x,2h)} - \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}}_{D_c f(x,h)}\right]$$

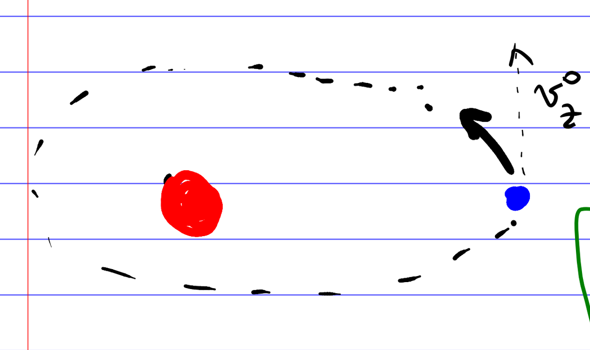
$$f'(x) = D_c f(x,h) + \frac{D_c f(x,h) - D_c f(x,2h)}{3} + O(h^4)$$

CVIČENÍ (s Matlabem)

Př: Slunce: $x_S^{(0)} = (0,0)$, $v_S^{(0)} = (0,0)$, $m_S = 1.99e^{30}$ [kg]

Země: $x_Z^{(0)} = (\ \ ,0)$, $V_Z^{(0)} = (0,\ \ )$, $m_Z = 5.98e^{24}$

$1.5e^{11}$ [m] $\quad$ $3.0e^4$ [$m s^{-1}$]



Gravitační působení síl: $G = 6.472e^{-11}$ [$N m^2 kg^{-2}$]

$$\left[\underline{F} = -G\cdot\frac{m_S\cdot m_Z}{\|\underline{x_Z - x_S}\|^3}(\underline{x_Z - x_S})\right]$$ v čase t.

$F_Z = m_Z \cdot a_Z = m_Z \cdot \ddot{x}_Z$ $\qquad$ $\underline{x_Z}(t) = \begin{bmatrix} x_{Z1}(t) \\ x_{Z2}(t) \end{bmatrix}$

$$\ddot{x}_Z(t) = -\overbrace{G\cdot m_S}^{g=}\cdot m_Z \cdot \frac{x_Z(t)}{\|x_Z(t)\|^3}$$

$\boxed{\text{Předp.: } x_S = (0,0) \text{ a nezávisí na } t}$

Eulerovo schéma

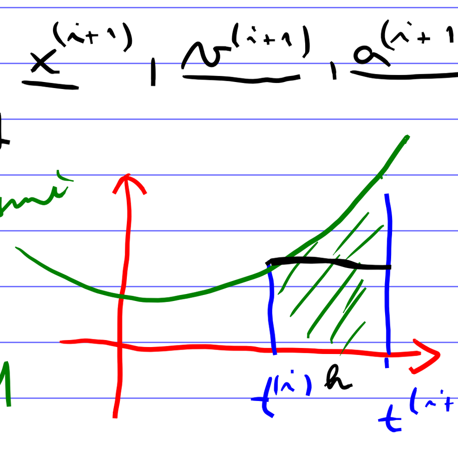
t_0, h … dané $\quad t_0, t_0+h, t_0+2h, t_0+3h, \dots, \overbrace{t_0+ih}^{t^{(i)}}, \dots$

známe $\underline{x^{(i)}}, \underline{v^{(i)}}, \underline{a^{(i)}}$ $\longrightarrow$ $\underline{x^{(i+1)}}, \underline{v^{(i+1)}}, \underline{a^{(i+1)}}$

$\qquad \quad \ \ \| \quad \ \ \|$
$\qquad \quad \dot{x}^{(i)} \ \ \ddot{x}^{(i)}$ $\quad$ Chceme najít

Jak? : $\underline{v^{(i+1)}} = \underline{v^{(i)}} + \underbrace{h\cdot a^{(i)}}_{\text{odhad}}$ $\quad \int_{t^{(i)}}^{t^{(i+1)}} a(t)\,dt$ přesně

$\underline{x^{(i+1)}} = \underline{x^{(i)}} + h\,\underline{v^{(i)}}$



$$\underline{a^{(i)}} = \frac{1}{m_Z} F_Z^{(i)} = -\frac{g}{\|\underline{x}^{(i)}\|^3}\cdot \underline{x^{(i)}}$$