MARS - test 2

1. Příklad [10b]: Najděte všechna řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y''(t) - 20y'(t) + 64y(t) = 0 \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 60 \end{cases}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\text{Charakteristický polynom:}\quad & \lambda^2 - 20\lambda + 64 = (\lambda-4)(\lambda-16) = 0 \Rightarrow \begin{array}{ll} \lambda_1 & = \ \ 4 \\ \lambda_2 & = 16 \end{array} \\
& y(t) = c_1\mathrm{e}^{4t} + c_2\mathrm{e}^{16t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\
\text{Počáteční pdmínka:}\quad & 3 = y(0) = c_1 + c_2 \\
& 60 = y'(0) = \left(4c_1\mathrm{e}^{4t} + 16c_2\mathrm{e}^{16t}\right)_{|t=0} = 4c_1 + 16c_2 \\
& \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 4 \\
& y(t) = \underline{-\mathrm{e}^{4t} + 4\mathrm{e}^{16t}} \quad \text{na } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Link na wolframalpha.

2. Příklad [10b]: Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

$$y''(t) + y(t) = 2\sin(t).$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\text{Homogenní rovnice:}\quad & y_H''(t) + y_H(t) = 0 && t \in \mathbb{R} \\
& \lambda^2 + 1 = 0 && \text{charakteristický polynom} \\
& y_H(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) && c_1, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Partikulární řešení:}\quad & y_P''(t) + y_P(t) = 2\sin(t) \qquad \text{kde } y_P(t) = c_1(t)\cos(t) + c_2(t)\sin(t) \\
& y_P'(t) = c_1'(t)\cos(t) + c_2'(t)\sin(t) - c_1(t)\sin(t) + c_2(t)\cos(t) \\
\text{dle [MI21-ODR] str. 106 zvolíme } & c_1'(t)\cos(t) + c_2'(t)\sin(t) = 0, \text{ tedy } c_1'(t) = -\tan(t)c_2'(t) \\
& y_P'(t) = -c_1(t)\sin(t) + c_2(t)\cos(t) \\
& y_P''(t) = -c_1'(t)\sin(t) + c_2'(t)\cos(t) - c_1(t)\cos(t) - c_2(t)\sin(t) \\
2\sin(t) = y_P''(t) + y_P(t) & = -c_1'(t)\sin(t) + c_2'(t)\cos(t) \\
& = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}c_2'(t)\sin(t) + c_2'(t)\cos(t) = c_2'(t)\frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{\cos(t)} = c_2'(t)\frac{1}{\cos(t)} \\
c_2'(t) & = 2\sin(t)\cos(t) = \left(\sin^2(t)\right)' \\
c_1'(t) & = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}2\sin(t)\cos(t) = -2\sin^2(t) = (\sin(t)\cos(t) - t)' \\
y_P(t) & = (\sin(t)\cos(t) - t)\cos(t) + \sin^2(t)\sin(t) = \sin(t)(1-t) \\
\text{Řešení :}\quad y(t) = y_P(t) + y_H(t) & = \sin(t)(1-t) + c_1\cos(t) + c_2\sin(t) \text{ na } \mathbb{R}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\
& = \underline{-t\sin(t) + k_1\cos(t) + k_2\sin(t)} \text{ na } \mathbb{R}, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Link na wolframalpha.

Reference

[MI21-ODR] B. Krajc, P. Beremlijski: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Matematika pro inženýry 21. století, mi21.vsb.cz