MARS - test 1

1. Příklad [10b]: Řešte Cauchyovu úlohu:

$$\begin{cases} \frac{y'(t)}{t} & = 2y(t) - 15ty(t) \\ y(\frac{1}{5}) & = 3. \end{cases}$$

Řešení:

$$\frac{1}{y(t)} \cdot y'(t) = 2t - 15t^2 \qquad \left(t \neq 0 \wedge t_0 = \frac{1}{5}\right) \Rightarrow t \in (0, \infty)$$

$$\int \left(2t - 15t^2\right) \,\mathrm{d}t = t^2 - 5t^3$$

$$\int \frac{1}{y(t)} \cdot y'(t) \,\mathrm{d}t = \left(\int \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z\right)_{|_{z=y(t)}} = \ln(|y(t)|)$$

$$\ln(|y(t)|) = c + t^2 - 5t^3$$

$$|y(t)| = K \cdot \mathrm{e}^{t^2 - 5t^3} \qquad K = \mathrm{e}^c \in \mathbb{R}_+$$

$$y(t) = L \cdot \mathrm{e}^{t^2 - 5t^3} \qquad L \in \mathbb{R}$$

$$\text{C.Ú:} \qquad 3 = y(\frac{1}{5}) = L \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{5^2} - 5\frac{1}{5^3}} = L$$

$$\text{Tedy :} \qquad y(t) = \underline{3\mathrm{e}^{t^2 - 5t^3}} \qquad \text{na } (0, \infty)$$

Link na wolframalpha.

2. Příklad [10b]: Najděte maximální řešení C.Ú.

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) \cdot \mathrm{cotg}(t) = \mathrm{e}^t \cdot \sin(t) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Řešení:
Předně z definičního oboru funkce cotg a počáteční podmínky plyne $t \in (0, \pi)$.
Homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} y_H'(t) - \mathrm{cotg}(t) \cdot y_H(t) &= 0 && y_H = 0 \text{ je řešením} \\ (\ln|y_H(t)|)' = \frac{1}{y_H(t)} \cdot y_H'(t) &= \mathrm{cotg}(t) = (\ln(\sin(t)))' \\ \ln|y_H(t)| &= c + \ln(\sin(t)) && c \in \mathbb{R} \\ |y_H(t)| &= \mathrm{e}^c \sin(t) = K \sin(t) && K = \mathrm{e}^c \in \mathbb{R}_+ \\ y_H(t) &= k \sin(t) && k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Partikulární řešení: Hledáme $y_P(t)$ ve tvaru $y_P(t) = k(t)\sin(t)$ aby

$$\begin{aligned} y_P'(t) - \mathrm{cotg}(t) y_P(t) &= \mathrm{e}^t \cdot \sin(t) \\ k'(t)\sin(t) + k(t)\cos(t) - k(t)\sin(t)\frac{\cos(t)}{\sin(t)} &= \mathrm{e}^t \cdot \sin(t) \\ k'(t) &= \mathrm{e}^t \\ k(t) &= \mathrm{e}^t \\ y_P(t) &= \mathrm{e}^t \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

Řešení zadané ODR je

$$y(t) = y_P(t) + y_H(t) = \mathrm{e}^t \cdot \sin(t) + k\sin(t) \text{ na } (0, \pi),\ k \in \mathbb{R}$$

Pro zadanou CÚ. platí

$$\begin{aligned} \text{Počáteční podmínka:} &\quad 0 = y(\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + k \ \Rightarrow\ k = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \\ \text{Řešení C.Ú.:} &\quad y(t) = \underline{\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \sin(t)} \text{ na } (0, \pi) \end{aligned}$$

Link na wolframalpha.