MARS - tutoriál 3

1. Příklad: ([Cha-PMII] 553): Řešte soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 4y_1(t) - 9y_2(t) + 5y_3(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) - 10y_2(t) + 7y_3(t) \\ y_3'(t) &= y_1(t) - 17y_2(t) + 12y_3(t). \end{aligned}$$

Řešení:
Hledejme vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 1 & -10 & 7 \\ 1 & -17 & 12 \end{bmatrix}.$$

Tato čísla jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} 0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -9 & 5 \\ 1 & -10-\lambda & 7 \\ 1 & -17 & 12-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} r_3 \\ r_2 \\ r_1 \end{matrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -17 & 12-\lambda \\ 1 & -10-\lambda & 7 \\ 4-\lambda & -9 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - (4-\lambda) r_1 \end{matrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -17 & 12-\lambda \\ 0 & 7-\lambda & -5+\lambda \\ 0 & 59-17\lambda & -\lambda^2+16\lambda-43 \end{vmatrix} = -\left[(7-\lambda)\left(-\lambda^2+16\lambda-43\right) - (-5+\lambda)(59-17\lambda)\right] = \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3), \end{aligned}$$

tedy $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, což jsou navzájem různá vlastní čísla s násobností 1. Ke každému vlastnímu číslu λ_i hledejme příslušný vlastní vektor $\mathbf{u}_i$, který je netriviálním řešením rovnice

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{u}_i = \mathbf{0}.$$

Tedy

$$\underline{\lambda_1 = 1}: \quad \begin{bmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 1 & -11 & 7 \\ 1 & -17 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \\ r_1 \\ r_3 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -11 & 7 \\ 3 & -9 & 5 \\ 1 & -17 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 - 3r_1 \\ r_3 - r_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -11 & 7 \\ 0 & 24 & -16 \\ 0 & -60 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3r_1 + (11/8)r_2 \\ (1/8)r_2 \\ r_3 + (5/2)r_2 \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 2}: \quad \begin{bmatrix} 2 & -9 & 5 \\ 1 & -12 & 7 \\ 1 & -17 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \\ r_1 \\ r_3 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -12 & 7 \\ 2 & -9 & 5 \\ 1 & -17 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -12 & 7 \\ 0 & 15 & -9 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5r_1 + (12/3)r_2 \\ (1/3)r_2 \\ r_3 + (1/3)r_2 \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 3}: \quad \begin{bmatrix} 1 & -9 & 5 \\ 1 & -13 & 7 \\ 1 & -17 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -9 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2r_1 - (9/2)r_2 \\ -(1/2)r_2 \\ r_3 - 2r_2 \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla spolu s příslušnými vlastními vektory matice $\mathbf{A}$ nám určují funkce vektorové

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = e^{\lambda_1}\mathbf{u}_1 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = e^{\lambda_2}\mathbf{u}_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) = e^{\lambda_3}\mathbf{u}_3 = e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tvořící fundamentální systém řešení zadané soustavy diferenciálních rovnic, jehož lineární kombinací

$$\mathbf{y}(t) = c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t) + c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t) + c_3\boldsymbol{\varphi}_3(t) = \underline{\begin{bmatrix} c_1e^t + c_2e^{2t} - c_3e^{3t} \\ 2c_1e^t + 3c_2e^{2t} + c_3e^{3t} \\ 3e^t + 5c_2e^{2t} + 2c_3e^{3t} \end{bmatrix}}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

dostaneme obecné řešení zadané soustavy diferenciálních rovnic.

2. Příklad: (od B. Krajce): Řešte soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu vyhovující zadaným počátečním podmínkám

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t)$$
$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení:
Vlastní čísla matice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ jsou kořeny charakteristického polynomu

$$0 = -(1+\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2) = 0 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vlastní vektory jsou

$$\underline{\lambda_1 = -2}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 - 3r_1 \end{matrix} \quad \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\lambda_2 = 2}: \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 + r_1 \end{matrix} \quad \to \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Fundamentální systém řešení soustavy

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = e^{\lambda_1}\mathbf{u}_1 = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = e^{\lambda_2}\mathbf{u}_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Řešení soustavy

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Z počáteční podmínky plyne

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tedy řešením zadané soustavy s počáteční podmínkou je vektorová funkce

$$\mathbf{y}(t) = -3e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} e^{2t} + 3e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Příklad: (od B. Krajce): Řešte homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu vyhovující zadaným počátečním podmínkám

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t)$$
$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení:
Vlastní čísla matice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

tedy komplexně sdružená dvojice čísel $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ s násobností 1. Ke každému vlastnímu číslu λ_i najděme příslušný vlastní vektor

$$\underline{\lambda_1 = -i}: \quad \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 - ir_1 \end{matrix} \quad \to \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}$$
$$\underline{\lambda_2 = i}: \quad \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 + ir_1 \end{matrix} \quad \to \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla spolu s příslušnými vlastními vektory matice $\mathbf{A}$ nám určují komplexní fundamentální systém řešení zadané soustavy diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{\psi}_1(t) = e^{\lambda_1}\mathbf{u}_1 = e^{-it} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\psi}_2(t) = e^{\lambda_2}\mathbf{u}_2 = e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \overline{\boldsymbol{\psi}}_1(t) = e^{\overline{\lambda}_1}\overline{\mathbf{u}}_1$$

ze kterých snadno vyjádříme reálný fundamentální systém řešení zadané soustavy diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\psi}_1(t) + \overline{\boldsymbol{\psi}}_1(t)) = \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\psi}_1(t)) = \mathrm{Re}\left((\cos(t) - i\sin(t)) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\psi}_1(t) - \overline{\boldsymbol{\psi}}_1(t)) = \mathrm{Im}\,(\boldsymbol{\psi}_1(t)) = \mathrm{Im}\left((\cos(t) + i\sin(t)) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix},$$

jehož lineární kombinací záskáme obecné řešení soustavy

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Dosaďme nyní počáteční podmínky

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tedy řešením zadané soustavy s počáteční podmínkou je vektorová funkce

$$\mathbf{y}(t) = \underline{\begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Příklad: (od B. Krajce): Řešte homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu vyhovující zadaným počátečním podmínkám

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t)$$
$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:
Vlastní čísla matice $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ jsou kořeny charakteristického polynomu

$$-\lambda(4-\lambda)+5 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2-20}}{2} = 2 \pm i,$$

tedy komplexně sdružená dvojice čísel $\lambda_1 = 2-i$, $\lambda_2 = 2+i$ s násobností 1. Ke každému vlastnímu číslu λ_i najděme příslušný vlastní vektor

$$\underline{\lambda_1 = 2-i}: \quad \begin{bmatrix} 2+i & -5 \\ 1 & -2+i \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \\ (2+i)r_2 - r_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\lambda_2 = 2+i}: \quad \begin{bmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \\ (2-i)r_2 - r_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla spolu s příslušnými vlastními vektory matice $\mathbf{A}$ nám určují komplexní fundamentální systém řešení zadané soustavy diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{\psi}_1(t) = e^{\lambda_1}\mathbf{u}_1 = e^{(2-i)t} \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t}\left(\cos(-t) + i\sin(-t)\right) \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\psi}_2(t) = e^{\lambda_2}\mathbf{u}_2 = e^{(2+i)t} \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} = \overline{\boldsymbol{\psi}}_1(t) = e^{\overline{\lambda}_1}\overline{\mathbf{u}}_1,$$

ze kterých snadno vyjádříme reálný fundamentální systém řešení zadané soustavy diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\psi}_1(t) + \overline{\boldsymbol{\psi}}_1(t)) = \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\psi}_1(t)) = \mathrm{Re}\left(e^{2t}\left(\cos(t) - i\sin(t)\right)\begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}\right) = e^{2t}\begin{bmatrix} 2\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\psi}_1(t) - \overline{\boldsymbol{\psi}}_1(t)) = \mathrm{Im}\,(\boldsymbol{\psi}_1(t)) = \mathrm{Im}\left(e^{2t}\left(\cos(t) - i\sin(t)\right)\begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}\right) = e^{2t}\begin{bmatrix} -2\sin(t) - \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix},$$

jehož lineární kombinací záskáme obecné řešení soustavy

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 2\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix} -2\sin(t) - \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}.$$

Dosaďme nyní počáteční podmínky

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tedy řešením zadané soustavy s počáteční podmínkou je vektorová funkce

$$\mathbf{y}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} (2\cos(t) - \sin(t)) + 2\left(-2\sin(t) - \cos(t)\right) \\ \cos(t) + 2\left(-\sin(t)\right) \end{bmatrix} = \underline{e^{2t}\begin{bmatrix} -5\sin(t) \\ \cos(t) - 2\sin(t) \end{bmatrix}} \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Příklad: (od B. Krajce): Řešte nehomogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu vyhovující zadaným počátečním podmínkám

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) + \frac{1}{e^t - 1} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}\left(\ln(2)\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Řešení:
Vzhledem k tomu, že jmenovatel $e^t - 1$ nesmí být nulový a s přihlédnutím k počáteční podmínce, hledáme řešení pro $t \in (0, \infty)$. Vlastní čísla matice $A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ jsou kořeny charakteristického polynomu

$$(-4 - \lambda)(3 - \lambda) + 12 = \lambda(\lambda + 1) = 0,$$

tedy dvojice reálných čísel $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ s násobností 1. Ke každému vlastnímu číslu λ_i najděme příslušný vlastní vektor

$$\begin{aligned} \underline{\lambda_1 = -1}: \quad & \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -r_1 \\ r_2 + 2r_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \underline{\lambda_2 = 0}: \quad & \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{2} r_2 \\ 2r_2 + 3r_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vlastní čísla spolu s příslušnými vlastními vektory matice $\mathbf{A}$ nám obecné řešení

$$\mathbf{y}_H(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

homogenní soustavy

$$\mathbf{y}_H'(t) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}_H(t).$$

Hledejme partikulární řešení soustavy

$$\mathbf{y}_P'(t) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}_P(t) + \frac{1}{e^t - 1} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_P(t) &= c_1(t) e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \\ \mathbf{y}_P'(t) &= c_1'(t) e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} - c_1(t) e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2'(t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}_P(t) &= -c_1(t) e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tedy

$$c_1'(t) e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2'(t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_2'(t) &= \frac{-e^t}{\mathrm{e}^t - 1} \longrightarrow c_1(t) = -\int \frac{e^t}{\mathrm{e}^t - 1} \mathrm{d}x = -\ln\left(e^t - 1\right) \\ c_2'(t) &= 0 \qquad\quad \longrightarrow c_2(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_P(t) = -e^{-t}\ln\left(e^t-1\right)\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}.$$

Řešení nehomogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic je tedy

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_P(t) + \mathbf{y}_H(t) = -e^{-t}\ln\left(e^t-1\right)\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} + c_1e^{-t}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}.$$

Dosaďme nyní počáteční podmínky

$$\begin{bmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix} = \mathbf{y}\left(\ln(2)\right) = \frac{c_1}{2}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix},$$

tedy řešením zadané soustavy s počáteční podmínkou je vektorová funkce

$$\mathbf{y}(t) = -e^{-t}\ln\left(e^t-1\right)\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} - e^{-t}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} = \underline{\left(\ln\left(e^t-1\right)+1\right)e^{-t}\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}} \quad \text{na } (0,\infty).$$

Reference

[MI21-ODR] B. Krajc, P. Beremlijski: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Matematika pro inženýry 21. století, mi21.vsb.cz

[Cha-PMII] J. Charvát, M. Hála, V. Kelar, Z. Šibrava: *Příklady k matematice II*, skriptum ČVUT 1999

[Kop-PMFII] Kopáček a kolektiv: Příklady z matematiky pro fyziky II, Matfyzpress 2003