MARS - tutoriál 2

1. Příklad: ([MI21-ODR] příklady k procvičení ke kapitole 9, 2.a): Nalezněte maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y'' - \frac{3}{t^2} y' = \frac{1}{t^2} \\ y(3) = 0,\ y'(3) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Řešení:
Funkce $\frac{-3}{t^2}$, $\frac{1}{t^2}$ jsou spojité na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$. Vzhledem k zadaným počátečním podmínkám (v bodě 3), budeme řešení hledat na intervalu $J = (0, \infty)$. Označíme $z = y'$. Je zřejmé, že pro takto zavedenou funkci z platí

$$\begin{cases} z' - \frac{3}{t^2} z = \frac{1}{t^2} \\ z(3) = -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

což je Cauchyova úloha s lineární diferecniální rovnicí prvního řádu, jejichž řešení jsme probírali v prvním tutoriálu. Použijeme tedy na ní metodu variace konstant:

$$\text{homog. rovnice: } z_H' - \frac{3}{t^2} z_H = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cl} \frac{z_H'}{z_H} & = (\ln|z_H|)' \\ \shortparallel & \\ \frac{3}{t^2} & = \left(-\frac{3}{t}\right)' \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} \ln|z_H(t)| & = -\frac{3}{t} + k,\ k \in \mathbb{R} \\ |z_H(t)| & = \mathrm{e}^k \mathrm{e}^{-\frac{3}{t}},\ \mathrm{e}^k \in \mathbb{R}^+ \\ z_H(t) & = c\mathrm{e}^{-\frac{3}{t}},\ c \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{variace konstant: } \left(z_P(t) = c(t)\mathrm{e}^{-\frac{3}{t}}\right) \wedge \left(\frac{1}{t^2} = z_P'(t) - \frac{3}{t^2} \cdot z_P(t)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t^2} = c'(t)\mathrm{e}^{-\frac{3}{t}} + -\frac{3}{t} c(t)\mathrm{e}^{-\frac{3}{t}} + \frac{3}{t^2} c(t)\mathrm{e}^{-\frac{3}{t}}$$

$$\Rightarrow \quad c'(t) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{t}}}{t^2} \quad \Rightarrow \quad c(t) = \int \frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{t}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{3}{t}}$$

$$\Rightarrow \quad z_P(t) = \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{3}{t}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{t}} = -\frac{1}{3}$$

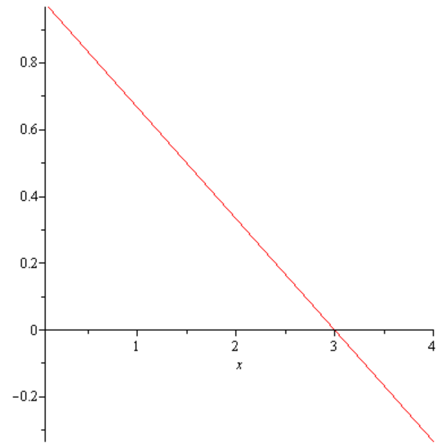
$$\Rightarrow \quad z(t) = z_H(t) + z_P(t) = c\mathrm{e}^{-\frac{3}{t}} - \frac{1}{3},\ c \in \mathbb{R}$$

$$\text{poč. podmínka: } -\frac{1}{3} = z(3) = c\underbrace{e^{-\frac{3}{t}}}_{>0} - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad z(t) = -\frac{1}{3}$$

Pak ale

$$y(t) = \int z(t)\,\mathrm{d}t + c_\star = -\frac{t}{3} + c_\star \quad \Rightarrow \quad 0 = y(3) = -1 + c_\star \quad \Rightarrow \quad c_\star = 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(t) = \frac{3-t}{3},\ t \in (0, \infty)}$$

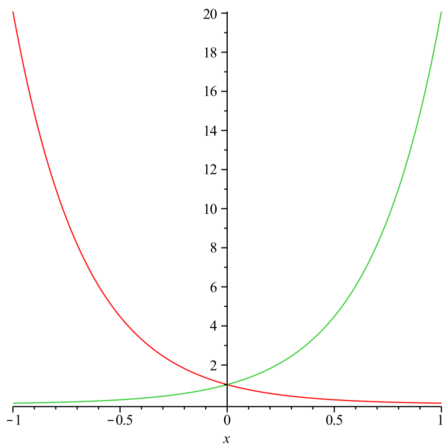


wolframalpha - řešení

2. Příklad: Řešte zadané homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

   (a) ([Cha-PMII] 462): $y'' - 9y = 0$

$$\lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t}}$$



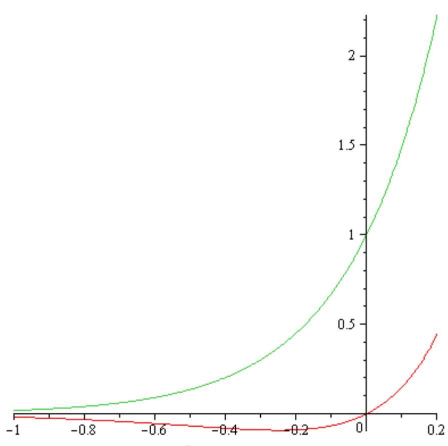
$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$

$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$

wolframalpha - řešení

   (b) ([Cha-PMII] 463): $y'' - 8y' + 16y = 0$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y(t) = c_1 t e^{4t} + c_2 e^{4t}}$$



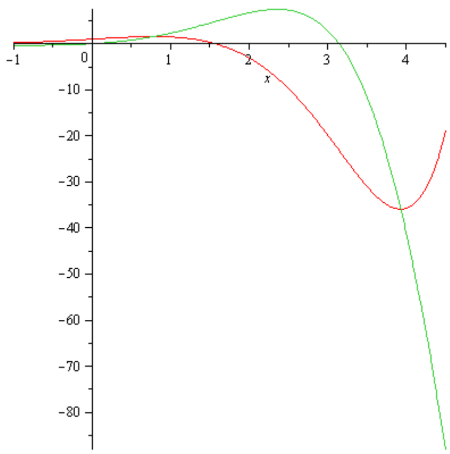
$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$

$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$

wolframalpha - řešení

(c) ([Cha-PMIII] 464): $y'' - 2y' + 2y = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i \quad \Rightarrow \quad \underline{y(t) = c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t)}$$

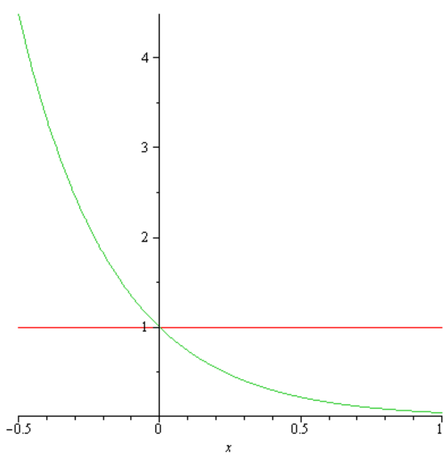


$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$

wolframalpha - řešení

(d) ([Cha-PMIII] 465): $y'' + 3y' = 0$

$$\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y(t) = c_1 + c_2 e^{-3t}}$$

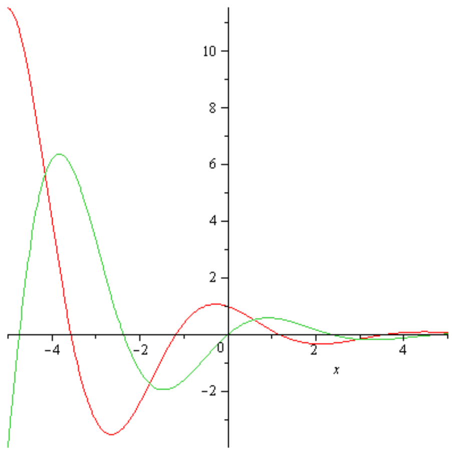


$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$

wolframalpha - řešení

(e) ([Cha-PMII] 467): $y'' + y' + 2y = 0$

$$\lambda^2+\lambda+2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2}=\frac{-1}{2}\pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad\Rightarrow\quad \underline{y(t)=c_1e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+c_2e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)}$$

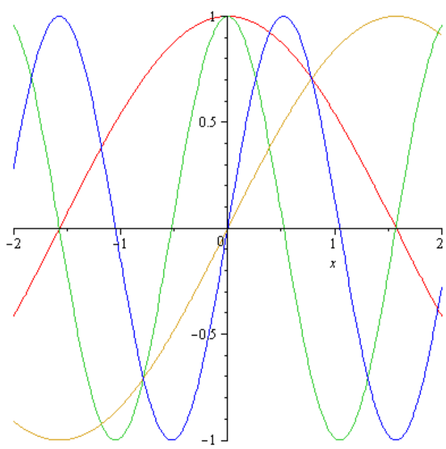


$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$

wolframalpha - řešení

(f) ([MI21-ODR] příklady k procvičení ke kapitole 9, 3.h): $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$

$$\lambda^4+10\lambda^2+9=(\lambda^2+9)(\lambda^2+1)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda\in\{i,3i,-1,-3i\}$$
$$\Rightarrow\quad \underline{y(t)=c_1\cos(t)+c_2\cos(3t)+c_3\sin(t)+c_4\sin(3t)}$$



$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 1$

wolframalpha - řešení

3. Příklad ([MI21-ODR] příklady k procvičení ke kapitole 9, 4): Jak vypadá LDR řádu 4 s konstantními reálnými koeficienty, jestliže kořeny jejího charakteristického polynomu jsou 1, 1, $-3i$, $3i$:
Řešení:

$$0 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3i)(\lambda + 3i) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 + 3) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 3$$

Hledaná LDR je

$$\underline{y^{(4)} - 2y''' + 4y'' - 6y' + 3y = 0.}$$

4. Příklad ([MI21-ODR] příklady k procvičení ke kapitole 9, 10): Nalezněte řešení zadaných Cauchyových úloh

   (a) $\begin{cases} y'' + 9y = \frac{1}{\sin(3t)} \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} y'' + 4y = \sin(t) + 2\sin(3t) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Řešení:

(a) Ponejprve najdeme interval obsahují číslo $\frac{\pi}{6}$, na kterém je funkce $\frac{1}{\sin(3t)}$ spojitá:

$$0 \neq \sin(3t) \quad \Rightarrow \quad 3t \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\} \quad \Rightarrow \quad t \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{k\frac{\pi}{3}\right\}.$$

Jelikož $0\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6} \leq 1\frac{\pi}{3}$, je hledaným intervalem $J = (0, \frac{\pi}{3})$. Hledáme na J řešení zadané diferenciální rovnice:

i. homogenní rovnice: $\lambda^2 + 9 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda \in \{3i, -3i\} \ \Rightarrow\ y_H(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)$

ii. variace konstant: $\Big(y_P(t) = c_1(t)\cos(3t) + c_2(t)\sin(3t)\Big) \wedge \Big(y_P''(t) + 9y_P(t) = \frac{1}{\sin(3t)}\Big)$.
Ve shodě s návodem v [MI21-ODR] vypočteme

$$y_P'(t) = \overbrace{c_1'(t)\cos(3t) + c_2'(t)\sin(3t)} - 3c_1(t)\sin(3t) + 3c_2(t)\cos(3t)$$

a položíme označenou část rovnu nule:

$$c_1'(t)\cos(3t) + c_2'(t)\sin(3t) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2'(t) = -c_1'(t)\frac{\cos(3t)}{\sin(3t)}.$$

Pak je

$$y_P''(t) = -3c_1'(t)\sin(3t) + 3c_2'(t)\cos(3t) - 9c_1(t)\cos(3t) - 9c_2(t)\sin(3t).$$

Dosazením do diferenciální rovnice pro y_P dostáváme

$$\frac{1}{\sin(3t)} = y_P''(t) + 9y_P(t) = -3c_1'(t)\sin(3t) + 3c_2'(t)\cos(3t) =$$
$$= -3c_1'(t)\underbrace{\left(\sin(3t) + \frac{\cos^2(3t)}{\sin(3t)}\right)}_{\frac{\sin^2(3t)+\cos^2(3t)}{\sin(3t)}} = -3c_1'(t)\frac{1}{\sin(3t)}.$$

Všimeme si, že $t \in (0, \frac{\pi}{3}) \Rightarrow 3t \in (0, \pi) \Rightarrow \sin(3t) \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{\sin(3t)} \in (1, \infty)$. Dále pak

$$\begin{array}{lcl} c_1'(t) = -\frac{1}{3} & & c_1(t) = -\frac{t}{3} \\ c_2'(t) = \frac{\cos(3t)}{3\sin(3t)} & \Rightarrow & c_2(t) = \frac{1}{3}\int \frac{\cos(3t)}{\sin(3t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\ln\left(\sin(3t)\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow y_P(t) = -\frac{t}{3}\cos(3t) + \frac{1}{9}\ln\left(\sin(3t)\right)\sin(3t)$$

a proto

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) - \frac{t}{3}\cos(3t) + \frac{1}{9}\ln\left(\sin(3t)\right)\sin(3t)$$

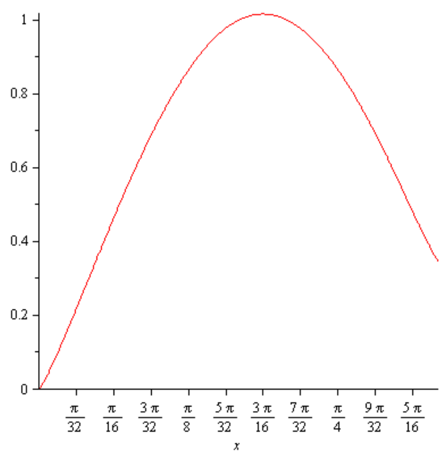
$$y'(t) = -3c_1\sin(3t) + 3c_2\cos(3t) + t\sin(3t) + \frac{1}{9}\left[\frac{3\cos(3t)}{\sin(3t)}\sin(3t) + 3\ln\left(\sin(3t)\right)\cos(3t)\right]$$

Dosazením do počátečních podmínek dostáváme

$$\begin{array}{lcl} 1 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = c_2 & & c_2 = 1 \\ \frac{\pi}{6} = y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3c_1 + \frac{\pi}{6} & \Rightarrow & c_1 = 0 \end{array}$$

a konečně

$$\underline{y(t) = \sin(3t) - \frac{t}{3}\cos(3t) + \frac{\ln\left(\sin(3t)\right)}{9}\sin(3t) \text{ na } t \in (0, \frac{\pi}{2})}.$$



wolframalpha

(b)

i. homogenní rovnice: $\lambda^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda \in \{2i, -2i\} \;\Rightarrow\; y_H(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$

ii. variace konstant:

$$\left(y_P(t) = c_1(t)\cos(2t) + c_2(t)\sin(2t)\right) \wedge \left(y_P''(t) + 4y_P(t) = \sin(t) + 2\sin(3t)\right)$$

Napočteme si potřebné derivace (a zadáme vztah mezi $c_1(t)$ a $c_2(t)$ tak, aby zmizely c_1', c_2' ve vztahu pro y_P')

$$\begin{aligned}
y_P'(t) &= \overbrace{c_1'(t)\cos(2t) + c_2'(t)\sin(2t)}^{=0} - 2c_1(t)\sin(2t) + 2c_2(t)\cos(2t)\\
y_P''(t) &= -2c_1'(t)\sin(2t) + 2c_2'(t)\cos(2t) - 4c_1(t)\cos(2t) - 4c_2(t)\sin(2t)\\
c_2'(t) &= -c_1'(t)\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}
\end{aligned}$$

Reference

[MI21-ODR] B. Krajc, P. Beremlijski: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Matematika pro inženýry 21. století, mi21.vsb.cz

[Cha-PMII] J. Charvát, M. Hála, V. Kelar, Z. Šibrava: *Příklady k matematice II*, skriptum ČVUT 1999

[Kop-PMFII] Kopáček a kolektiv: Příklady z matematiky pro fyziky II, Matfyzpress 2003