MARS - test 2

1. Příklad [10b]: Najděte všechna řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0 \\ y(0) = 3,\ y'(0) = -11 \end{cases}$$

Řešení:

$$\text{Charakteristický polynom:} \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & 3 \\ \lambda_2 & = & -2 \end{array}$$

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{3t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Počáteční pdmínka:} \quad 3 = y(0) = c_1 + c_2$$

$$-11 = y'(0) = \left(3c_1 \mathrm{e}^{3t} - 2c_2 \mathrm{e}^{-2t}\right)_{|t=0} = 3c_1 - 2c_2$$

$$\Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 4$$

$$y(t) = \underline{-\mathrm{e}^{3t} + 4\mathrm{e}^{-2t}} \quad \text{na } \mathbb{R}$$

Link na wolframalpha.

2. Příklad [10b]: Najděte všechna řešení rovnice

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t^2+1}$$

Řešení:

$$\begin{array}{rll} \text{Homogenní rovnice:} & y_H''(t) - 2y_H'(t) + y_H(t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ & \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0 & \text{charakteristický polynom} \\ & y_H(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 t\mathrm{e}^t & c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{Partikulární řešení:} \quad y_P''(t) - 2y_P'(t) + y_P(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t^2+1} \qquad \text{kde } y_P(t) = c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)t\mathrm{e}^t$$

$$y_P'(t) = c_1'(t)\mathrm{e}^t + c_2'(t)t\mathrm{e}^t + c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)(t+1)\mathrm{e}^t$$

$$\text{dle [MI21-ODR] str. 106 zvolíme } c_1'(t)\mathrm{e}^t + c_2'(t)t\mathrm{e}^t = 0,\ \text{tedy } c_1'(t) = -tc_2'(t)$$

$$y_P'(t) = c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)(t+1)\mathrm{e}^t$$

$$y_P''(t) = c_1'(t)\mathrm{e}^t + c_2'(t)(t+1)\mathrm{e}^t + c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)(t+2)\mathrm{e}^t$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^t}{t^2+1} = y_P''(t) - 2y_P'(t) + y_P(t) &= c_1'(t)\mathrm{e}^t + c_2'(t)(t+1)\mathrm{e}^t + c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)(t+2)\mathrm{e}^t \\ &\quad - 2\left(c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)(t+1)\mathrm{e}^t\right) + \left(c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)t\mathrm{e}^t\right) \\ &= c_1'(t)\mathrm{e}^t + c_2'(t)(t+1)\mathrm{e}^t = -tc_2'(t)\mathrm{e}^t + c_2'(t)(t+1)\mathrm{e}^t = c_2'(t)\mathrm{e}^t \end{aligned}$$

$$c_2'(t) = \frac{1}{t^2+1} = (\arctan(t))'$$

$$c_1'(t) = -\frac{t}{t^2+1} = \left(-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right)'$$

$$y_P(t) = \mathrm{e}^t\left(-\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + t\arctan(t)\right)$$

$$\text{Řešení :} \qquad y(t) = y_P(t) + y_H(t) = \underline{\mathrm{e}^t\left(t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right) + c_1\mathrm{e}^t + c_2t\mathrm{e}^t} \text{ na } \mathbb{R}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Link na wolframalpha.

MARS - test 1 (náhradní termín)

1. Příklad [10b]: Najděte maximální řešení C.Ú.:

$$y'(t) = \frac{y(t)-1}{1+t}, \qquad y(0) = 2$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y(t)-1} \cdot y'(t) &= \frac{1}{t+1} && \left(t \notin \{-1\} \wedge t_0 = \sqrt{2}\right) \Rightarrow t \in (-1, \infty) \\
\frac{1}{1+y^2(t)} \cdot y'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \\
\int \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t &= \ln(|1+t|) = \ln(t+1) && \text{protože } t \in (-1, \infty) \\
\int \frac{1}{y(t)-1} \cdot y'(t) \, \mathrm{d}t &= \left(\int \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z\right)_{|_{z=y(t)-1}} = \ln(|y(t)-1|) \\
\ln(|y(t)-1|) &= c + \ln(t+1) && c \in \mathbb{R} \\
|y(t)-1| &= K(t+1) && K = \mathrm{e}^c \in \mathbb{R}_+ \\
y(t) - 1 &= k(t+1) && k \in \mathbb{R} \\
y(t) &= k(t+1) + 1 \\
\text{C.Ú:} \qquad 2 = y(0) &= k + 1 \Rightarrow k = 1 \\
\text{Tedy :} \qquad y(t) &= \underline{t+2} && \text{na } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Link na wolframalpha.

2. Najděte maximální řešení C.Ú.:

$$y'(t) = -ty(t) + t, \qquad y(1) = 2$$

Řešení:
Homogenní rovnice:

$$\begin{aligned}
y_H'(t) + ty_H(t) &= 0 && y_H = 0 \text{ je řešením} \\
(\ln|y_H(t)|)' = \frac{1}{y_H(t)} \cdot y_H'(t) &= -t = \left(-\frac{t^2}{2}\right)' \\
\ln|y_H(t)| &= c - \frac{t^2}{2} && c \in \mathbb{R} \\
|y_H(t)| &= \mathrm{e}^{c-\frac{t^2}{2}} = \mathrm{e}^c \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = K\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} && K = \mathrm{e}^c \in \mathbb{R}_+ \\
y_H(t) &= k\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} && k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Partikulární řešení: Hledáme $y_P(t)$ ve tvaru $y_P(t) = k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ aby

$$\begin{aligned}
y_P'(t) &= -ty_P(t) + t \\
k'(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}(-t) &= -tk(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + t \\
k'(t) &= t\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \\
\int t\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t &= \left(\int \mathrm{e}^u \mathrm{d}u\right)_{|_{u=\frac{t^2}{2}}} = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \\
k(t) &= \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \\
y_P(t) &= 1
\end{aligned}$$

Řešení zadané ODR je

$$y(t) = y_P(t) + y_H(t) = 1 + k\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \text{ na } \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$$

Pro zadanou CÚ. platí

$$\begin{aligned} \text{Počáteční podmínka:} \quad & 2 = y(1) = 1 + k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \ \Rightarrow\ k = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\ \text{Řešení C.Ú.:} \quad & y(t) = \underline{1 + \mathrm{e}^{\frac{1-t^2}{2}}} \text{ na } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Link na wolframalpha.

Reference

[MI21-ODR] B. Krajc, P. Beremlijski: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Matematika pro inženýry 21. století, mi21.vsb.cz