MARS - test 1

1. Příklad [10b]: Řešte Cauchyovu úlohu:

$$\begin{cases} y'(t) & = \frac{t\left(1-y^2(t)\right)}{y(t)(1-t^2)} \\ y(\sqrt{2}) & = 2. \end{cases}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\frac{y(t)}{1-y^2(t)} \cdot y'(t) &= \frac{t}{1-t^2} && \left(t \notin \{-1,1\} \land t_0 = \sqrt{2}\right) \Rightarrow t \in (1,\infty) \\
\frac{1}{1+y^2(t)} \cdot y'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \\
\int \frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\ln(|1-t^2|) = -\frac{1}{2}\ln(t^2-1) \\
\int \frac{y(t)}{1-y^2(t)} \cdot y'(t)\,\mathrm{d}t &= \left(\int \frac{z}{1-z^2}\,\mathrm{d}z\right)_{|_{z=y(t)}} = -\frac{1}{2}\ln(|1-y^2(t)|) \\
-\frac{1}{2}\ln(|1-y^2(t)|) &= c - \frac{1}{2}\ln(t^2-1) \\
\ln(|1-y^2(t)|) &= \ln(t^2-1) + d && d = -2c \\
|1-y^2(t)| &= K \cdot (t^2-1) && K = \mathrm{e}^d \in \mathbb{R}_+ \\
1-y^2(t) &= L \cdot (t^2-1) && L \in \mathbb{R} \\
y(t) = |y(t)| &= \sqrt{1-L\cdot(t^2-1)} && \text{jelikož } y(\sqrt{2}) = 2 > 0
\end{aligned}$$

C.Ú: $\quad 2 = y(\sqrt{2}) = \sqrt{1-L\cdot(2-1)} = \sqrt{1-L}$

$$L = -3$$

Tedy : $\quad y(t) = \sqrt{1+3(t^2-1)} = \underline{\sqrt{3t^2-2}} \qquad$ na $(1,\infty)$

Link na wolframalpha.

2. Příklad [10b]: Najděte maximální řešení C.Ú.

$$\begin{cases} y'(t) &= -ty(t) + t \\ y(1) &= 2 \end{cases}$$

Řešení:
Homogenní rovnice:

$$\begin{aligned}
y_H'(t) + ty_H(t) &= 0 && y_H = 0 \text{ je řešením} \\
(\ln|y_H(t)|)' = \frac{1}{y_H(t)} \cdot y_H'(t) &= -t = \left(-\frac{t^2}{2}\right)' \\
\ln|y_H(t)| &= c - \frac{t^2}{2} && c \in \mathbb{R} \\
|y_H(t)| &= \mathrm{e}^{c-\frac{t^2}{2}} = \mathrm{e}^c \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = K\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} && K = \mathrm{e}^c \in \mathbb{R}_+ \\
y_H(t) &= k\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} && k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Partikulární řešení: Hledáme $y_P(t)$ ve tvaru $y_P(t) = k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ aby

$$\begin{aligned}
y_P'(t) &= -ty_P(t) + t \\
k'(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}(-t) &= -tk(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + t \\
k'(t) &= t\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \\
\int t\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t &= \left(\int \mathrm{e}^u \mathrm{d}u\right)_{|_{u=\frac{t^2}{2}}} = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \\
k(t) &= \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \\
y_P(t) &= 1
\end{aligned}$$

Řešení zadané ODR je

$$y(t) = y_P(t) + y_H(t) = 1 + k\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \text{ na } \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$$

Pro zadanou CÚ. platí

$$\begin{aligned}
\text{Počáteční podmínka:} &\quad 2 = y(1) = 1 + k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \ \Rightarrow\ k = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\
\text{Řešení C.Ú.:} &\qquad y(t) = \underline{1 + \mathrm{e}^{\frac{1-t^2}{2}}} \text{ na } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Link na wolframalpha.