MARS - 3. část projektu

1. [10 bodů] Řešte homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t)$$
$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Určeme vlastní čísla

$$0 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-4-\lambda) - 5(-4) = \lambda^2 + 4$$
$$\lambda_1 = -2i, \ \lambda_2 = 2i.$$

Určeme vlastní vektory

$$\underline{\lambda_1 = -2i}: \begin{bmatrix} 4+2i & 5 \\ -4 & -4+2i \end{bmatrix} \begin{matrix} -r_2/2 \\ r_1 + r_2 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2-i \\ 2i & 1+2i \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 - ir_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} i-2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\lambda_2 = 2i}: \begin{bmatrix} 4-2i & 5 \\ -4 & -4-2i \end{bmatrix} \begin{matrix} -r_2/2 \\ r_1 + r_2 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ -2i & 1-2i \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 + ir_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -i-2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Fundamentální systém řešení soustavy

$$\boldsymbol{\psi}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 = \mathrm{e}^{-2it} \begin{bmatrix} i-2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\psi}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 = \mathrm{e}^{\bar{\lambda}_1 t}\bar{\mathbf{u}}_1 = \mathrm{e}^{2it} \begin{bmatrix} -i-2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_1(t) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2it}\begin{bmatrix} i-2 \\ 2 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{2it}\begin{bmatrix} -i-2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left((\cos(2t) - i\sin(2t))\begin{bmatrix} i-2 \\ 2 \end{bmatrix} + (\cos(2t) + i\sin(2t))\begin{bmatrix} -i-2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \cos(2t)\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \sin(2t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\varphi}_2(t) &= \frac{i}{2}\left(\mathrm{e}^{-2it}\begin{bmatrix} i-2 \\ 2 \end{bmatrix} - \mathrm{e}^{2it}\begin{bmatrix} -i-2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{i}{2}\left((\cos(2t) - i\sin(2t))\begin{bmatrix} i-2 \\ 2 \end{bmatrix} - (\cos(2t) + i\sin(2t))\begin{bmatrix} -i-2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \cos(2t)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin(2t)\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Řešení soustavy

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= c_1\left(\cos(2t)\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}+\sin(2t)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+c_2\left(\cos(2t)\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}+\sin(2t)\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}-2c_1\cos(2t)+c_1\sin(2t)-c_2\cos(2t)-2c_2\sin(2t)\\ 2c_1\cos(2t)+2c_2\sin(2t)\end{bmatrix},\ c_1,c_2\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Počáteční podmínky

$$\begin{bmatrix}5\\-6\end{bmatrix}=\mathbf{y}(0)=\begin{bmatrix}-2c_1-c_2\\2c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t)=\underline{\begin{bmatrix}5\cos(2t)-5\sin(2t)\\-6\cos(2t)+2\sin(2t)\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}}$$

Link na wolframalpha.

2. [10 bodů] Řešte nehomogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'(t)&=\begin{bmatrix}1&1\\-2&-1\end{bmatrix}\mathbf{y}(t)+\begin{bmatrix}-\cos(t)\\\sin(t)+\cos(t)\end{bmatrix}\\ \mathbf{y}(0)&=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Řešení 1 způsob:
Homogenní soustava

$$\mathbf{y}_H'(t)=\begin{bmatrix}1&1\\-2&-1\end{bmatrix}\mathbf{y}_H(t),\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\-2&-1\end{bmatrix}$$

Určeme vlastní čísla

$$\det(\mathbf{A})=(1-\lambda)(-1-\lambda)+2=\lambda^2-1+2=0\quad \lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$$

a příslušné vlastní vektory

$$\begin{aligned}\underline{\lambda_1=i}:&\ \begin{bmatrix}1-i&1\\-2&-1-i\end{bmatrix}\begin{matrix}-r_2\\2r_1+(1-i)r_2\end{matrix}\to\begin{bmatrix}2&1+i\\0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1+i\\-2\end{bmatrix}\\ \underline{\lambda_2=-i}:&\ \begin{bmatrix}1+i&1\\-2&-1+i\end{bmatrix}\begin{matrix}-r_2\\2r_1+(1+i)r_2\end{matrix}\to\begin{bmatrix}2&1-i\\0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1-i\\-2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Fundamentální systém řešení homogenní soustavy

$$\boldsymbol{\psi}_1(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1=\mathrm{e}^{it}\begin{bmatrix}1+i\\-2\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{\psi}_2(t)=\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2=\mathrm{e}^{\bar\lambda_1 t}\bar{\mathbf{u}}_1=\mathrm{e}^{-it}\begin{bmatrix}1-i\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_1(t)&=\frac12\left(\mathrm{e}^{it}\begin{bmatrix}1+i\\-2\end{bmatrix}+\mathrm{e}^{-it}\begin{bmatrix}1-i\\-2\end{bmatrix}\right)=\frac12\left((\cos(t)+i\sin(t))\begin{bmatrix}1+i\\-2\end{bmatrix}+(\cos(t)-i\sin(t))\begin{bmatrix}1-i\\-2\end{bmatrix}\right)\\ &=\cos(t)\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+\sin(t)\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{\varphi}_2(t)&=\frac{i}{2}\left(\mathrm{e}^{it}\begin{bmatrix}1+i\\-2\end{bmatrix}-\mathrm{e}^{-it}\begin{bmatrix}1-i\\-2\end{bmatrix}\right)=\frac{i}{2}\left((\cos(t)+i\sin(t))\begin{bmatrix}1+i\\-2\end{bmatrix}-(\cos(2t)+i\sin(2t))\begin{bmatrix}1-i\\-2\end{bmatrix}\right)\\ &=\cos(t)\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}-\sin(t)\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Řešení homogenní soustavy

$$\mathbf{y}_H(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

Partikulární řešení $\mathbf{y}_P(t)$ hledejme metodou variace konstant, tedy ve tvaru

$$\mathbf{y}_P(t) = c_1(t) \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'_P(t) &= c'_1(t) \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{bmatrix} + c'_2(t) \begin{bmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix} + c_1(t) \begin{bmatrix} -\sin(t) - \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} \sin(t) - \cos(t) \\ 2\cos(t) \end{bmatrix} \\
&\| \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}_P(t) + \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix} \\
&= \left(c_1(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix} \\
&= \left(c_1(t) \begin{bmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} -\cos(t) + \sin(t) \\ 2\cos(t) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix} &= c'_1(t) \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{bmatrix} + c'_2(t) \begin{bmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) & -\cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) & 2\sin(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pomocí řádkových úprav zjednodušíme tuto soustavu lineárních rovnic

$$\left[\begin{array}{ccc} \cos(t) - \sin(t) & -\cos(t) - \sin(t) & -\cos(t) \\ -2\cos(t) & 2\sin(t) & \sin(t) + \cos(t) \end{array}\right] \begin{array}{c} r_1 + r_2/2 \\ r_2/2 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc} -\sin(t) & -\cos(t) & \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t)) \\ -\cos(t) & \sin(t) & \frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)) \end{array}\right]$$

tedy

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{y}_P(t) &= -\frac{t}{2} \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{bmatrix} + \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Řešení splňující počáteční podmínku

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_P(t) + \mathbf{y}_H(t) &= t \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ 2\sin(t) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{y}(t) &= \underline{t \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{bmatrix}}, \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Řešení 2 způsob:
Z první rovnice soustavy

$$
\begin{aligned}
y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) - \cos(t) \\
y_2'(t) &= -2y_1(t) - y_2(t) + \cos(t) + \sin(t)
\end{aligned}
$$

lze vyjádřit

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= y_1'(t) - y_1(t) + \cos(t) \\
y_2'(t) &= \left(y_1'(t) - y_1(t) + \cos(t)\right)' = y_1''(t) - y_1'(t) - \sin(t)
\end{aligned}
$$

Dosazením do druhé rovnice soustavy dostaneme lineární ODR druhého řádu

$$
\begin{aligned}
\overbrace{y_1''(t) - y_1'(t) - \sin(t)}^{y_2'(t)} &= -2y_1(t) - \overbrace{\left(y_1'(t) - y_1(t) + \cos(t)\right)}^{y_2(t)} + \cos(t) + \sin(t) \\
y_1''(t) + y_1(t) &= 2\sin(t)
\end{aligned}
$$

Řešením (postup nebudeme uvádět wolframalpha) této ODR je

$$
y_1(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) - t\cos(t)
$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= \overbrace{\left(-c_1\sin(t) + c_2\cos(t) - \cos(t) + t\sin(t)\right)}^{y_1'(t)} - \overbrace{\left(c_1\cos(t) + c_2\sin(t) - t\cos(t)\right)}^{y_1(t)} + \cos(t) \\
&= -c_1\left(\sin(t) + \cos(t)\right) + c_2\left(\cos(t) - \sin(t)\right) + t\left(\sin(t) + \cos(t)\right)
\end{aligned}
$$

Zbývá pouze dosadit počáteční podmínky

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 + c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

a

$$
\mathbf{y}(t) = \underline{t\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{bmatrix}}, \quad t \in \mathbb{R}
$$

Link na wolframalpha.