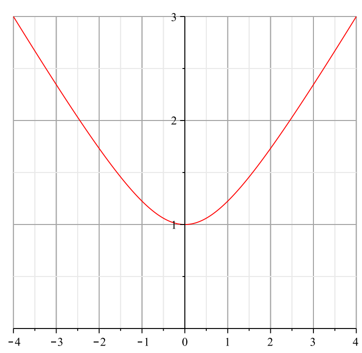
MARS - tutoriál 1

1. Příklad ([MI21-ODR] 3.5):
   Metodou separace proměnných řešte Cauchyovu úlohu $y'(t) = \frac{t}{2y(t)},\ y(0) = 1$.
   Řešení:
   Diferenciální rovnici upravíme tak, aby se proměnná t a hledaná funkce $y(t)$ nevyskytovaly na stejné straně rovnice:
   $$2y(t) \cdot y'(t) = t$$
   Pak
   $$t = \left(\int t \,\mathrm{d}t\right)' = \left(\frac{t^2}{2}\right)'$$
   $$2y(t) \cdot y'(t) = \left(\int 2y(t) \cdot y'(t) \,\mathrm{d}t\right)' = \left(\left(\int 2z \,\mathrm{d}z\right)_{|_{z=y(t)}}\right)' = \left((z^2)_{|_{z=y(t)}}\right)' = \left(y^2(t)\right)'$$
   $$y^2(t) = \frac{t^2}{2} + C \qquad \text{po dosazení okrajové podmínky: } 1^2 = \frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 1$$
   $$y(t) \overset{y \in (0,\infty)}{=} |y(t)| = \sqrt{\frac{t^2}{2} + 1} = \sqrt{\frac{t^2+2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t^2+2}.$$
   Protože v zadání je $y(t)$ ve jmenovateli, je $y \neq 0$ a tedy buď $y \in (-\infty, 0)$, nebo $y \in (0, \infty)$. Vzhledem k zadané počáteční podmínce jsme absolutní hodnotu v předchozí rovnici upravili dle druhé varianty.



wolframalpha - řešení

2. Příklad ([Kop-PMFII] 1.F):
Metodou separace proměnných řešte obyčejnou diferenciální rovnici $y'(t) = ty^3(t)\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
Řešení:
Na první pohled je zřejmé, že $y(t) = 0$ je řešením. Pro $y(t) \neq 0$ pak podobně jako v předchozím příkladu

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y^3(t)} \cdot y'(t) &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\
\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} &= \left(\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s\right)_{|_{s=1+t^2}}\right)' = \left(\left(\sqrt{s}\right)_{|_{s=1+t^2}}\right)' = \left(\sqrt{1+t^2}\right)' \\
\frac{1}{y^3(t)} \cdot y'(t) &= \left(\int \frac{1}{y^3(t)} \cdot y'(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\left(\int \frac{1}{z^3}\,\mathrm{d}z\right)_{|_{z=y(t)}}\right)' = \left(\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}\right)_{|_{z=y(t)}}\right)' = \left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{y^2(t)}\right)' \\
y^2(t) &= \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+C} = \frac{1}{K-2\sqrt{1+t^2}}, \qquad \text{kde } K = -2C \\
|y(t)| &= \sqrt{\frac{1}{K-2\sqrt{1+t^2}}} \;\Rightarrow\; y(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{K-2\sqrt{1+t^2}}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Zadá-li nám někdo $y(t_0) = y_0$, pak

(a) $y_0 = 0$, pak je jediným řešením $y(t) = 0$, jelikož žádné z řešení (1) na něj nelze navázat.

(b) $y_0 \neq 0$, pak

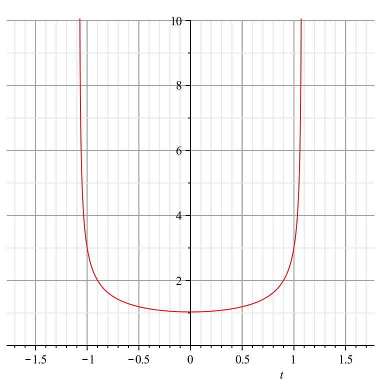
$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{K-2\sqrt{1+t_0^2}}} \;\Rightarrow\; y_0^2 = \frac{1}{K-2\sqrt{1+t_0^2}} \;\Rightarrow\; K-2\sqrt{1+t_0^2} = \frac{1}{y_0^2} \;\Rightarrow\; K = \frac{1}{y_0^2}+2\sqrt{1+t_0^2}$$

a tedy

$$y(t) = \frac{\operatorname{sign}(y_0)}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2}+2\sqrt{1+t_0^2}-2\sqrt{1+t^2}}}, \qquad \text{na } t \in (-B, B)$$

kde

$$\frac{1}{y_0^2}+2\sqrt{1+t_0^2}-2\sqrt{1+t^2} > 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{2y_0^2}+\sqrt{1+t_0^2}\right)^2-1}}_{B} > |t|.$$



Graf pro $t_0 = 1,\; y_0 = 3$

wolframalpha - řešení

3. Příklad ([Cha-PMII] 10.5): Metodou separace proměnných řešte obyčejnou diferenciální rovnici $ty'(t) = -\sqrt{1-y^2(t)}\arcsin(y(t))$.
Řešení:
Na první pohled je zřejmé, že $y(t) = -1$, $y(t) = 0$, $y(t) = 1$ jsou řešením. Dále pokud $t = 0$, pak nutně $y(0) \in \{-1, 0, 1\}$. Pro $y \neq 0$, $t \neq 0$ pak

$$\frac{1}{\arcsin(y)\cdot\sqrt{1-y^2(t)}}\cdot y'(t) = \frac{-1}{t} = \left(\int \frac{-1}{t}\,\mathrm{d}t\right)' = (-\ln|t|)'$$

$$\left(\int \frac{1}{\arcsin(y)\cdot\sqrt{1-y^2(t)}}\cdot y'(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\left(\int \frac{1}{\arcsin(z)\cdot\sqrt{1-z^2}}\,\mathrm{d}z\right)_{|z=y(t)}\right)' =$$

$$= \left(\left(\left(\int \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w\right)_{|w=\arcsin(z)}\right)_{|z=y(t)}\right)' = (\ln|\arcsin(y(t))|)'$$

$$\ln|\arcsin(y(t))| = -\ln|t| + C$$

$$|\arcsin(y(t))| = \frac{e^C}{|t|}$$

Nastanou zřejmě čtyři možnosti:

$$(t,y) \in \begin{cases} \Omega_1 &= (-\infty,0)\times(-1,0) \\ \Omega_2 &= (-\infty,0)\times(0,1) \\ \Omega_3 &= \quad (0,\infty)\times(-1,0) \\ \Omega_4 &= \quad (0,\infty)\times(0,1) \end{cases}$$

tedy

$$\arcsin(y(t)) = \frac{K}{t} \quad \Rightarrow \left|\frac{K}{t}\right| \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(t) = \sin\left(\frac{K}{t}\right),\ |t| \in \left(\frac{2|K|}{\pi}, \infty\right)$$

$$\text{na } \Omega_1 : y(t) = -\sin\left(\frac{K_1}{t}\right), \quad K_1 \geq 0,\ t \in \left(-\infty, -\frac{2K_1}{\pi}\right)$$

$$\text{na } \Omega_2 : y(t) = \quad \sin\left(\frac{K_2}{t}\right), \quad K_2 \geq 0,\ t \in \left(-\infty, -\frac{2K_2}{\pi}\right)$$

$$\text{na } \Omega_3 : y(t) = -\sin\left(\frac{K_3}{t}\right), \quad K_3 \geq 0,\ t \in \left(\frac{2K_3}{\pi}, \infty\right)$$

$$\text{na } \Omega_4 : y(t) = \quad \sin\left(\frac{K_4}{t}\right), \quad K_4 \geq 0,\ t \in \left(\frac{2K_4}{\pi}, \infty\right)$$

Jelikož například v Ω_4 je $\lim_{t\to\frac{2K_4}{\pi}-} y'(t) = 0$, a analogická tvrzení platí také v $\Omega_1, \ldots, \Omega_3$, lze navíc jednotlivá řešení pro $y \in \langle -1, 0)$, nebo $y \in (0, 1\rangle$ na sebe "navázat". Pokud tedy chceme řešení procházející zadaným bodem (t_0, y_0), pak pro

(a) $y_0 \notin \langle -1, 1\rangle \;\Rightarrow$ řešení neexistuje.

(b) $y_0 \in \langle -1, 0)$:

i. $t_0 < 0$:

$$y(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{L_1}{t}\right) & t \in \left(-\infty, -\frac{2L_1}{\pi}\right) \\ -1 & t \in \left\langle -\frac{2L_1}{\pi}, \frac{2L_2}{\pi} \right\rangle \\ -\sin\left(\frac{L_2}{t}\right) & t \in \left(\frac{2L_2}{\pi}, \infty\right) \end{cases} \tag{2}$$

kde $L_2 \in (0, \infty\rangle$ je libovolné a $|\arcsin(y_0)| = \frac{L_1}{|t_0|} \Rightarrow L_1 = |t_0| \cdot |\arcsin(y_0)|$. Pozor, řešení je jednoznačné pouze na $(-\infty, 0\rangle$, konstantu L_2 si můžeme zvolit a dochází tak k nejednoznačnosti řešení na $\mathbb{R}$.

ii. $t_0 = 0$: pokud $y_0 = -1$, pak $y(t) = -1$ je jediným řešením. Pokud $y_0 \in (-1, 0)$, pak řešení neexistuje.

iii. $t_0 > 0$: Řešení je dáno vzorcem (2) avšak tentokrát $L_1 \in (0, \infty\rangle$ je libovolné a $L_2 = |t_0| \cdot |\arcsin(y_0)|$. Řešení je jednoznačné pouze na $\langle 0, \infty)$, konstantu L_1 si můžeme zvolit a dochází tak k nejednoznačnosti řešení na $\mathbb{R}$.

(c) $y_0 = 0$: jediným řešením je $y(t) = 0$.

(d) $y_0 \in (0, 1\rangle$:

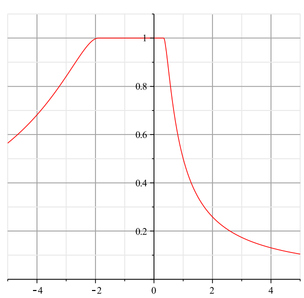
i. $t_0 < 0$:

$$y(t) = \begin{cases} -\sin\left(\frac{L_3}{t}\right) & t \in \left(-\infty, -\frac{2L_3}{\pi}\right) \\ 1 & t \in \left\langle -\frac{2L_3}{\pi}, \frac{2L_4}{\pi} \right\rangle \\ \sin\left(\frac{L_4}{t}\right) & t \in \left(\frac{2L_4}{\pi}, \infty\right) \end{cases} \tag{3}$$

kde $L_4 \in (0, \infty\rangle$ je libovolné a $|\arcsin(y_0)| = \frac{L_3}{|t_0|} \Rightarrow L_3 = |t_0| \cdot |\arcsin(y_0)|$. Pozor, řešení je jednoznačné pouze na $(-\infty, 0\rangle$, konstantu L_4 si můžeme zvolit a dochází tak k nejednoznačnosti řešení na $\mathbb{R}$.

ii. $t_0 = 0$: pokud $y_0 = 1$, pak $y(t) = 1$ je jediným řešením. Pokud $y_0 \in (0, 1)$, pak řešení neexistuje.

iii. $t_0 > 0$: Řešení je dáno vzorcem (3) avšak tentokrát $L_3 \in (0, \infty\rangle$ je libovolné a $L_4 = |t_0| \cdot |\arcsin(y_0)|$. Řešení je jednoznačné pouze na $\langle 0, \infty)$, konstantu L_3 si můžeme zvolit a dochází tak k nejednoznačnosti řešení na $\mathbb{R}$.



Graf pro $t_0 = 1$, $y_0 = 0.5$, zvoleno $L_3 = 3$

wolframalpha - řešení
Vidíme, že tady si wolfram moc neporadí

4. Příklad ([MI21-ODR] 4.2): Řešte Cauchyovu úlohu $y'(t) + \frac{1}{t} \cdot y(t) = t,\ y(-1) = 2.$
Řešení:

(a) Metodou přenásobení.
Zadaná obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu je tvaru $y(t)' + a(t) \cdot y(t) = b(t)$, kde $a(t) = \frac{1}{t}$ a $b(t) = t$. Rovnici přenásobíme kladnou diferencovatelnou funkcí (viz [MI21-ODR], kapitola 4) $e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}$

$$\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| \ \Rightarrow\ e^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} = |t|$$

zvolíme t (bez absolutní hodnoty), jelikož $|t|$ není diferencovatelná v 0. Po přenásobení

$$t \cdot y'(t) + y(t) = t^2$$
$$t^2 = \left(\int t^2\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\frac{t^3}{3}\right)'$$
$$t \cdot y'(t) + y(t) = (t \cdot y(t))'$$

dostáváme tedy

$$t \cdot y(t) = \frac{t^3}{3} + C, \quad -1 \cdot 2 = \frac{(-1)^3}{3} + C \ \Rightarrow\ C = -\frac{5}{3}$$
$$y(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{5}{3t}, \quad t \in (-\infty, 0).$$

(b) Metoda variace konstanty
i. Hledáme řešení $y_H(t)$ homogenní rovnice $y'_H(t) + \frac{1}{t} \cdot y_H(t) = 0$:

$$\frac{1}{y_H(t)} \cdot y'_H(t) = -\frac{1}{t}$$
$$-\frac{1}{t} = -\left(\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)' = -\ln|t|$$
$$\frac{1}{y_H(t)} \cdot y'_H(t) = \left(\int \frac{1}{y_H(t)} \cdot y'_H(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\left(\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\right)_{|z=y_H(t)}\right)' = \ln|y_H(t)|$$
$$\frac{e^C}{t} \overset{t\in(0,\infty)}{=} \frac{e^C}{|t|} = e^{C-\ln|t|} = e^{\ln|y_H(t)|} = |y_H(t)|, \quad e^C \in \mathbb{R}_+$$

Nyní se chceme zbavit absolutní hodnoty v předchozí rovnosti. Znaménko $y_H(t)$ lze elegantně schovat do znaménka konstanty K

$$y_H(t) = \frac{K}{t}, \quad K \in \mathbb{R},\ t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, \infty)$$

ii. Hledáme (jakékoli jedno) tzv. partikulární řešení $y_P(t)$ původní rovnice ve tvaru řešení homogenní rovnice, kde za konstantu dosadíme neznámou funkci proměnné t, což se nazývá metoda variace konstanty

$$\left(y_P(t) = \frac{K(t)}{t}\right) \wedge \left(y'_P(t) + \frac{1}{t} \cdot y_P(t) = t\right) \ \Rightarrow\ \overbrace{\frac{K'(t)}{t} - \frac{K(t)}{t^2}}^{y'_P(t)} + \frac{1}{t}\overbrace{\frac{K(t)}{t}}^{y_P(t)} = t \ \Rightarrow\ K'(t) = t^2$$

Zajímá nás jakékoli jedno řešení, není třeba tedy hledat všechna $K(t)$ vyhovující předchozí rovnosti, ale stačí vzít jedno z nich, například $\frac{t^3}{3}$ a potom

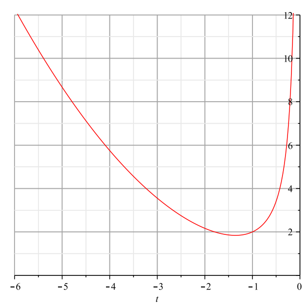
$$y_P(t) = \frac{K(t)}{t} = \frac{t^2}{3}.$$

iii. Obecné řešení nehomogenní rovnice získáme součtem homogenního a partikulárního řešení

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = \frac{K}{t} + \frac{t^2}{3}.$$

Nyní jen dosadíme počáteční podmínku

$$2 = \frac{K}{-1} + \frac{(-1)^2}{3} \;\Rightarrow\; K = -\frac{5}{3} \text{ tedy } \quad y(t) = -\frac{5}{3t} + \frac{t^2}{3},\; t \in (-\infty, 0).$$



wolframalpha - řešení

5. Příklad ([Cha-PMII] 10.10): Řešte Cauchyovu úlohu $y' - \frac{t^2}{1+t^3} y = \sqrt[3]{1+t^3},\ y(0) = 1.$ $y(t) = (x+1)\sqrt[3]{1+x^3}$

6. Příklad ([MI21-ODR] 1.4): Řešte lineární diferenciální rovnici $T_h'(t) = k(T_v - T_h(t))$, $T_h(0) = 100$. $T_v(t) = (100 - T_v)\mathrm{e}^{-kt} + T_v$

Reference

[MI21-ODR] B. Krajc, P. Beremlijski: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Matematika pro inženýry 21. století, mi21.vsb.cz

[Cha-PMII] J. Charvát, M. Hála, V. Kelar, Z. Šibrava: *Příklady k matematice II*, skriptum ČVUT 1999

[Kop-PMFII] Kopáček a kolektiv: Příklady z matematiky pro fyziky II, Matfyzpress 2003