MARS - test 2

1. Příklad [10b]: Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$$

Řešení:

Homogenní rovnice: $y_H''(t) + 3y_H'(t) + 2y_H(t) = 0$ $\qquad t \in \mathbb{R}$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \ \Rightarrow \ \begin{array}{l}\lambda_1 = -1\\ \lambda_2 = -2\end{array} \qquad \text{charakteristický polynom}$$

$$y_H(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{-2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Partikulární řešení: $y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$ $\qquad$ kde $y_P(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{-t} + c_2(t)\mathrm{e}^{-2t}$

$$\begin{aligned}
y_P'(t) &= c_1'(t)\mathrm{e}^{-t} + c_2'(t)\mathrm{e}^{-2t} + \\
&\quad - c_1(t)\mathrm{e}^{-t} - 2c_2(t)\mathrm{e}^{-2t}
\end{aligned}$$

dle [MI21-ODR] str. 106 zvolíme $c_1'(t)\mathrm{e}^{-t} + c_2'(t)\mathrm{e}^{-2t} = 0$ $\qquad c_2'(t) = -c_1'(t)\mathrm{e}^t$

$$\begin{aligned}
y_P'(t) &= -c_1(t)\mathrm{e}^{-t} - 2c_2(t)\mathrm{e}^{-2t}\\
y_P''(t) &= -c_1'(t)\mathrm{e}^{-t} - 2c_2'(t)\mathrm{e}^{-2t} + \\
&\quad c_1(t)\mathrm{e}^{-t} + 4c_2(t)\mathrm{e}^{-2t}\\
\frac{1}{1+\mathrm{e}^t} &= y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) = \\
&= -c_1'(t)\mathrm{e}^{-t} - 2c_2'(t)\mathrm{e}^{-2t}\\
\frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t} &= -c_1'(t)\mathrm{e}^{t} - 2c_2'(t) = c_1'(t)\mathrm{e}^t\\
c_1(t) &= \int \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \left(\int \frac{1}{1+z}\,\mathrm{d}z\right)_{|_{z=\mathrm{e}^t}} = \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\\
c_2(t) &= -\int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \left(\int \frac{z}{1+z}\,\mathrm{d}z\right)_{|_{z=\mathrm{e}^t}} = -\mathrm{e}^t + \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\\
y_P(t) &= \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^{-t} + \left[-\mathrm{e}^t + \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\right]\mathrm{e}^{-2t}
\end{aligned}$$

Řešení : $\qquad y(t) = y_P(t) + y_H(t) = \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^{-t} + \left[-\mathrm{e}^t + \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\right]\mathrm{e}^{-2t} +$

$$\begin{aligned}
&+ \tilde{c}_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{-2t} && c_1 = \tilde{c}_1 - 1\\
&= \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t}\right) + c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{-2t} && c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Link na wolframalpha.

2. Příklad [10b]: Najděte všechna řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Určeme vlastní čísla

$$\det(\mathbf{A}) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = (3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$$

Určeme vlastní vektory

$$\underline{\lambda_1 = 2}: \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \ r_2 - 2r_1 \ \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\lambda_2 = 3}: \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \ r_2 - r_1 \ \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Fundamentální systém řešení soustavy

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varphi}_2(t) = \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Řešení soustavy

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \mathrm{e}^{2t} + c_2 \mathrm{e}^{3t} \\ c_1 \mathrm{e}^{2t} + 2c_2 \mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

Počáteční podmínka

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y}(t) = \underline{\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

Reference

[MI21-ODR] B. Krajc, P. Beremlijski: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Matematika pro inženýry 21. století, mi21.vsb.cz