MARS - test 1

1. Příklad [10b]: Najděte maximální řešení C.Ú.

$$\begin{cases} y'(t) & = \frac{1-2t}{y^2(t)} \\ y(1) & = -\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \left(y^2(t)\right) \cdot y'(t) &= 1 - 2t \qquad\qquad y(t) \neq 0 \\ \left(\frac{y^3(t)}{3}\right)' &= \left(t - t^2\right)' \\ \frac{y^3(t)}{3} &= c + t - t^2 \\ y(t) &= \sqrt[3]{3\,(c + t - t^2)} \\ \text{C.Ú:} \qquad -\sqrt[3]{3} = y(1) &= \sqrt[3]{3c} \;\Rightarrow\; c = -1 \\ \text{Tedy :} \qquad y(t) &= -\sqrt[3]{3\,(t^2 - t + 1)} \text{ na } I \end{aligned}$$

Zbývá určit interval I, na kterém existuje řešení. Víme, že $0 \in I$ a $0 \neq -\sqrt[3]{3\,(t^2 - t + 1)}$. Protože $0 \neq t^2 - t + 1$ platí vždy, je $I = \mathbb{R}$.

2. Příklad [10b]: Najděte maximální řešení C.Ú.

$$\begin{cases} y'(t) &= ty(t) + t^3 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Řešení:

Homogenní rovnice: $y_H'(t) = ty_H(t)$ $\qquad y_H = 0$ je řešením

$$(\ln|y_H(t)|)' = \frac{1}{y_H(t)} \cdot y_H'(t) = t = \left(\frac{t^2}{2}\right)'$$

$$\ln|y_H(t)| = \frac{t^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$|y_H(t)| = e^{c+\frac{t^2}{2}} = e^c e^{\frac{t^2}{2}} = Ke^{\frac{t^2}{2}} \qquad K = e^c \in \mathbb{R}^+$$

$$y_H(t) = ke^{\frac{t^2}{2}} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Partikulární řešení: $y_P'(t) = ty_P(t) + t^3$ $\qquad$ kde $y_P(t) = k(t)e^{\frac{t^2}{2}}$

$$k'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + k(t)e^{\frac{t^2}{2}}t = tk(t)e^{\frac{t^2}{2}} + t^3$$

$$k'(t) = t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\int t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \left(\int 2ue^{-u}\mathrm{d}u\right)\Big|_{u=\frac{t^2}{2}} = \left(-2ue^{-u} + 2\int e^{-u}\mathrm{d}u\right)\Big|_{u=\frac{t^2}{2}}$$

$$= \left(-2(u+1)e^{-u}\right)\Big|_{u=\frac{t^2}{2}} = -(t^2+2)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$k(t) = -(t^2+2)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$y_P(t) = -(t^2+2)$$

Řešení ODR: $y(t) = y_P(t) + y_H(t) = -(t^2+2) + ke^{\frac{t^2}{2}}$ $\qquad k \in \mathbb{R}$

Počáteční podmínka: $1 = y(0) = -2 + k \Rightarrow k = 3$

Řešení C.Ú.: $y(t) = \underline{-(t^2+2) + 3e^{\frac{t^2}{2}}}$ $\qquad$ pro $t \in \mathbb{R}$.