MARS - 3. část projektu

1. [10 bodů] Řešte homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t).$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Určeme vlastní čísla

$$0 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ +(1+\lambda)r_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & -2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda^2 & 2+\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -2-\lambda \\ 2-\lambda^2 & 2+\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2-\lambda^2 & 1 \end{vmatrix} = (2+\lambda)(\lambda+2-\lambda^2)$$

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2$$

Určeme vlastní vektory

$$\underline{\lambda_1 = -2}: \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_2 \\ r_1 - 3r_2 \\ r_3 - r_2 \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_1 + r_2/2 \\ -r_2/2 \\ \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = -1}: \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_2 \\ r_1 - 2r_2 \\ r_3 - r_2 \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_1 + r_2/2 \\ -r_2/2 \\ r_3 - r_2 \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 2}: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_3 \\ r_1 - r_3 \\ r_1 + r_3 \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r_1 + r_2/4 \\ -r_2/4 \\ 2r_3 + r_2 \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fundamentální systém řešení soustavy

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varphi}_2(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varphi}_3(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Řešení soustavy

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -c_2\mathrm{e}^{-t} + 2c_3\mathrm{e}^{2t} \\ c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^{2t} \\ -c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

2. [10 bodů] Řešte nehomogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y}'(\pi) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení 1 způsob:
Homogenní soustava

$$\mathbf{y}'_H(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}_H(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{určeme vlastní čísla}$$

$$\det(\mathbf{A}) = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})^2 = \mathbf{O}, \text{ zvolme } \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{u}_1}: \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \to \varphi_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{0t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} t\mathrm{e}^{0t} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ 4t \end{bmatrix} \qquad \text{příslušné vlastní vektory}$$

$$\underline{\mathbf{u}_2}: \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \varphi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{0t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} t\mathrm{e}^{0t} = \begin{bmatrix} -t \\ 1+2t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_H(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1-2t \\ 4t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -t \\ 1+2t \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} c_1 - t(2c_1 + c_2) \\ c_2 + 2t(2c_1 + c_2) \end{bmatrix}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R} \qquad \text{řešení homogenní soustavy}$$

Partikulární řešení

$$\mathbf{y}_P'(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}_P(t) + \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \qquad (\star)$$

$$\text{kde} \qquad \mathbf{y}_P(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) - t(2c_1(t) + c_2(t)) \\ c_2(t) + 2t(2c_1(t) + c_2(t)) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_P'(t) = \begin{bmatrix} c_1'(t) - (2c_1(t) + c_2(t)) - t\,(2c_1'(t) + c_2'(t)) \\ c_2'(t) + 2\,(2c_1(t) + c_2(t)) + 2t\,(2c_1'(t) + c_2'(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}_P(t) = \begin{bmatrix} -\,(2c_1(t) + c_2(t)) \\ 2\,(2c_1(t) + c_2(t)) \end{bmatrix} \qquad \text{dosadíme do } (\star)$$

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) - (2c_1(t) + c_2(t)) - t\,(2c_1'(t) + c_2'(t)) \\ c_2'(t) + 2\,(2c_1(t) + c_2(t)) + 2t\,(2c_1'(t) + c_2'(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\,(2c_1(t) + c_2(t)) \\ 2\,(2c_1(t) + c_2(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) - t\,(2c_1'(t) + c_2'(t)) \\ c_2'(t) + 2t\,(2c_1'(t) + c_2'(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t & -t \\ 4t & 1+2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t & -t \\ 4t & 1+2t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-2t)(1+2t)+4t^2} \begin{bmatrix} 1+2t & t \\ -4t & 1-2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2t)\sin(t) + t\cos(t) \\ -4t\sin(t) + (1-2t)\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+t)\sin(t) - 2t\cos(t) \\ -(2t+3)\sin(t) + 2(2t-1)\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_P(t) = \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ -3\sin(t) - 2\cos(t) \end{bmatrix} \qquad ,\ t \in \mathbb{R}$$

Řešení splňující počáteční podmínku

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_P(t) + \mathbf{y}_H(t) = \begin{bmatrix} c_1 - t(2c_1 + c_2) \\ c_2 + 2t(2c_1 + c_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ -3\sin(t) - 2\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(\pi) = \begin{bmatrix} c_1 - \pi(2c_1 + c_2) \\ c_2 + 2\pi(2c_1 + c_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} 1-2\pi & -\pi \\ 4\pi & 1+2\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\pi & -\pi \\ 4\pi & 1+2\pi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\pi & \pi \\ -4\pi & 1-2\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\pi \\ -4\pi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \underline{\begin{bmatrix} 1+2\pi-2t \\ -4\pi+4t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ -3\sin(t) - 2\cos(t) \end{bmatrix}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Řešení 2 způsob:
Z první rovnice soustavy

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -2y_1(t) - y_2(t) + \sin(t) \\ y_2'(t) &= \ \ 4y_1(t) + 2y_2(t) + \cos(t) \end{aligned}$$

lze vyjádřit

$$\begin{aligned} y_2(t) &= -y_1'(t) - 2y_1(t) + \sin(t) \\ y_2'(t) &= (-y_1'(t) - 2y_1(t) + \sin(t))' = -y_1''(t) - 2y_1'(t) + \cos(t) \end{aligned}$$

Dosazením do druhé rovnice soustavy dostaneme lineární ODR druhého řádu

$$\begin{aligned}
\overbrace{-y_1''(t) - 2y_1'(t) + \cos(t)}^{y_2'(t)} &= 4y_1(t) + 2\overbrace{(-y_1'(t) - 2y_1(t) + \sin(t))}^{y_2(t)} + \cos(t) \\
-y_1''(t) &= 2\sin(t) \\
y_1'(t) &= 2\cos(t) + k_1 \\
y_1(t) &= 2\sin(t) + k_1 t + k_2 \\
y_2(t) &= -\overbrace{(2\cos(t) + k_1)}^{y_1'(t)} - 2\overbrace{(2\sin(t) + k_1 t + k_2)}^{y_1(t)} + \sin(t) = \\
&= -2\cos(t) - 3\sin(t) - k_1 - 2k_1 t - 2k_2
\end{aligned}$$

Dosadíme do počáteční podmínky:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(\pi) &= \begin{bmatrix} k_2 + \pi k_1 + 0 \\ -k_1 - 2k_2 - 2\pi k_1 + 2 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \pi & 1 \\ -1 - 2\pi & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \pi & 1 \\ -1 - 2\pi & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 + 2\pi & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 + 2\pi \end{bmatrix} \\
\mathbf{y}(t) &= \underline{\begin{bmatrix} 1 + 2\pi - 2t \\ -4\pi + 4t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ -3\sin(t) - 2\cos(t) \end{bmatrix}}, \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$