MARS - test 1

1. Příklad [10b]: Najděte maximální řešení C.Ú.

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{y(t)}{t} \\ y(1) &= 2 \end{cases}$$

Řešení: Jelikož $t \neq 0$ a v počáteční podmínce je $t = 1$, hledáme na $t \in \mathbb{R}^+$. Navíc $y(t) = 0$ je řešením ODR. Pro $y(t) \neq 0$ platí

$$\begin{aligned} (\ln|y(t)|)' &= \frac{1}{y(t)} y'(t) = \frac{1}{t} = (\ln|t|)' && \\ \ln|y(t)| &= \ln|t| + c = \ln(t) + c && c \in \mathbb{R} \\ |y(t)| &= e^{c+\ln(t)} = e^c e^{\ln(t)} = k_\star t && k_\star \in \mathbb{R}^+ \\ y(t) &= kt && k \in \mathbb{R} \\ \text{Počáteční podmínka:} \quad 2 &= y(1) = k1 = k && \\ \text{Řešení:} \quad y(t) &= \underline{2t} && \text{pro } t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

2. Příklad [10b]: Najděte maximální řešení C.Ú.

$$\begin{cases} y'(t) &= -ty(t) + t \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\text{Homogenní rovnice:}\quad & y_H'(t) = -t y_H(t) \\
(\ln|y_H(t)|)' = \frac{1}{y_H(t)} y_H'(t) &= -t = \left(-\frac{t^2}{2}\right)' \\
\ln|y_H(t)| &= -\frac{t^2}{2} + c && c \in \mathbb{R} \\
|y_H(t)| &= e^{c-\frac{t^2}{2}} = e^c e^{-\frac{t^2}{2}} = k_\star e^{-\frac{t^2}{2}} && k_\star \in \mathbb{R}^+ \\
y_H(t) &= k e^{-\frac{t^2}{2}} && k \in \mathbb{R} \\
\text{Partikulární řešení:}\quad & y_P'(t) = -t y_P(t) + t && \text{kde } y_P(t) = k(t) e^{-\frac{t^2}{2}} \\
k'(t) e^{-\frac{t^2}{2}} - k(t) e^{-\frac{t^2}{2}} t &= -t k(t) e^{-\frac{t^2}{2}} + t \\
k'(t) &= t e^{\frac{t^2}{2}} = \left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)' \\
k(t) &= e^{\frac{t^2}{2}} \\
\left(\text{jelikož} \quad \int t e^{\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \right. &= \left. \left(\int e^u \mathrm{d}u\right)\Big|_{u=\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}} \right) \\
y_P(t) &= e^{\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 \\
\text{Řešení ODR:}\quad & y(t) = y_P(t) + y_H(t) = 1 + k e^{-\frac{t^2}{2}} && k \in \mathbb{R} \\
\text{Počáteční podmínka:}\quad & 2 = y(0) = 1 + k \;\Rightarrow\; k = 1 \\
\text{Řešení C.Ú.:}\quad & y(t) = \underline{1 + e^{-\frac{t^2}{2}}} && \text{pro } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$