MARS - 3. část projektu

1. [10 bodů] Řešte homogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t).$$

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{určeme vlastní čísla}$$

$$\det(\mathbf{A}) = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0 \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$$

$$\underline{\lambda_1 = 1}: \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 - 3r_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{příslušné vlastní vektory}$$

$$\underline{\lambda_2 = 5}: \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 + r_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varphi}_2(t) = e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{fundamentální systém řešení soustavy}$$

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} c_2 e^{5t} - c_1 e^t \\ 3c_2 e^{5t} + c_1 e^t \end{bmatrix}},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{řešení soustavy.}$$

Link na výsledek z wolframalpha (ekvivalentní, ale složitější a nepřehlednější zápis).

2. [10 bodů] Řešte nehomogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s počáteční podmínkou:

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{bmatrix} -t^2 + t - 2 \\ 2t^2 - 4t - 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

<u>Homogenní soustava:</u> $\mathbf{y}_H'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}_H(t)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$ určeme vlastní čísla

$$\det(\mathbf{A}) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$$

$$\underline{\lambda_1 = 2}: \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \end{matrix} \quad \to \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ příslušné vlastní vektory

$$\underline{\lambda_2 = 3}: \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \end{matrix} \quad \to \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_H(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{3t} \end{bmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$ řešení homogenní soustavy

Partikulární řešení:

$$\mathbf{y}_P'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}_P(t) + \begin{bmatrix} -x^2+x-2 \\ 2x^2-4x-7 \end{bmatrix} \qquad (\star)$$

$$\text{kde} \quad \mathbf{y}_P(t) = \begin{bmatrix} c_1(t)e^{2t} + c_2(t)e^{3t} \\ c_1(t)e^{2t} + 2c_2(t)e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_P'(t) = \begin{bmatrix} c_1'(t)e^{2t} + 2c_1(t)e^{2t} + c_2'(t)e^{3t} + 3c_2(t)e^{3t} \\ c_1'(t)e^{2t} + 2c_1(t)e^{2t} + 2c_2'(t)e^{3t} + 6c_2(t)e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}_P(t) = \begin{bmatrix} 2c_1(t)e^{2t} + 3c_2(t)e^{3t} \\ 2c_1(t)e^{2t} + 6c_2(t)e^{3t} \end{bmatrix} \qquad \text{dosadíme do } (\star)$$

$$\begin{bmatrix} c_1'(t)e^{2t} + 2c_1(t)e^{2t} + c_2'(t)e^{3t} + 3c_2(t)e^{3t} \\ c_1'(t)e^{2t} + 2c_1(t)e^{2t} + 2c_2'(t)e^{3t} + 6c_2(t)e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1(t)e^{2t} + 3c_2(t)e^{3t} \\ 2c_1(t)e^{2t} + 6c_2(t)e^{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x^2+x-2 \\ 2x^2-4x-7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)e^{3t} \\ c_1'(t)e^{2t} + 2c_2'(t)e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^2+x-2 \\ 2x^2-4x-7 \end{bmatrix}$$

$$c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)e^{3t} = -t^2+t-2 \qquad (\blacktriangle)$$

$$c_1'(t)e^{2t} + 2c_2'(t)e^{3t} = 2t^2-4t-7 \qquad (\blacklozenge)$$

$$c_1'(t)e^{2t} = -4t^2+6t+3 \qquad 2(\blacktriangle)-(\blacklozenge)$$

$$c_1(t) = \int \left(-4t^2+6t+3\right) e^{-2t}\mathrm{d}t = \left(2t^2-t-2\right) e^{-2t}$$

$$-c_2'(t)e^{3t} = -3t^2+5t+5 \qquad (\blacktriangle)-(\blacklozenge)$$

$$c_2(t) = \int \left(3t^2-5t-5\right) e^{-3t}\mathrm{d}t = \left(-t^2+t+2\right) e^{-3t}$$

$$\mathbf{y}_P(t) = \begin{bmatrix} \left(2t^2-t-2\right) + \left(-t^2+t+2\right) \\ \left(2t^2-t-2\right) + 2\left(-t^2+t+2\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t^2 \\ t+2 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

Řešení soustavy:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_P(t) + \mathbf{y}_H(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1e^{2t} + c_2e^{3t} \\ c_1e^{2t} + 2c_2e^{3t} \end{bmatrix}$$

Řešení soustavy s poč. podmínkou:

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 \\ c_1+2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \underline{\begin{bmatrix} t^2 \\ t+2 \end{bmatrix}}, \quad t \in \mathbb{R}$$