MARS - 2. část projektu

1. [5 bodů] Pomocí substituce $z = y'$ nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice:

$$ty''(t) = y'(t) + t^2.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
tz'(t) - z(t) - t^2 &= 0 && \text{převedeme do tvaru lineární ODR 1. řádu} \\
z'(t) - \frac{1}{t}z(t) - t &= 0 && \text{pro přenásobení: } e^{\int -\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t} = e^{-\ln(|t|)} = \frac{1}{t} \text{ pro } t > 0 \\
\left(\frac{1}{t}z(t)\right)' = \frac{1}{t}z'(t) - \frac{1}{t^2}z(t) &= 1 = t' \\
\frac{1}{t}z(t) &= t + c && \text{kde } c \in \mathbb{R} \\
z(t) &= t^2 + tc && \text{na } (0, \infty) \\
y(t) = \int t^2 + tc\,\mathrm{d}t &= \frac{t^3}{3} + c\frac{t^2}{2} + c_2 && \text{označme } c_1 = \frac{c}{2};\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\
y(t) &= \begin{cases} \frac{t^3}{3} + c_1t^2 + c_2 & \text{na } (0, \infty) \\ \frac{t^3}{3} + c_3t^2 + c_4 & \text{na } (-\infty, 0) \end{cases} \\
\text{Protože} \quad c_2 &= \lim_{t\to 0+} y(t) = \lim_{t\to 0-} y(t) = c_4 \\
c_1 &= \lim_{t\to 0+} y''(t) = \lim_{t\to 0-} y''(t) = c_3 \\
y(t) &= \underline{\frac{t^3}{3} + c_1t^2 + c_2} && \text{na } \mathbb{R}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Link na wolframalpha.

2. [5 bodů] Nalezněte všechna řešení homogenní diferenciální rovnice:

$$y^{(5)}(t) - 3y^{(4)}(t) + 4y'''(t) - 4y''(t) + 3y'(t) - y(t) = 0.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1) &= 0 && \text{charakteristický polynom} \\
y(t) &= \underline{c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + c_4\cos(t) + c_5\sin(t)} && \text{na } \mathbb{R}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Link na wolframalpha.

3. [10 bodů] Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice:

$$2y''(t) + 5y'(t) = \cos^2(t).$$

Řešení:

$$\text{Homogenní rovnice:} \quad 2y_H''(t) + 5y_H'(t) = 0 \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$2\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda + \frac{5}{2}) = 0 \quad \text{charakteristický polynom}$$

$$y_H(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{5}{2}t}$$

$$\text{Partikulární řešení:} \quad 2y_P''(t) + 5y_P'(t) = \cos^2(t) \qquad \text{kde } y_P(t) = c_1(t) + c_2(t)e^{-\frac{5}{2}t}$$

$$\begin{aligned}
y_P'(t) &= c_1'(t) + c_2'(t)e^{-\frac{5}{2}t} - \frac{5}{2}c_2(t)e^{-\frac{5}{2}t} \\
&\text{dle [MI21-ODR] str. 106 zvolíme } c_1'(t) + c_2'(t)e^{-\frac{5}{2}t} = 0 \\
y_P'(t) &= -\frac{5}{2}c_2(t)e^{-\frac{5}{2}t} \\
y_P''(t) &= -\frac{5}{2}c_2'(t)e^{-\frac{5}{2}t} + \frac{25}{4}c_2(t)e^{-\frac{5}{2}t} \\
\cos^2(t) &= 2y_P''(t) + 5y_P'(t) = \\
&= -5c_2'(t)e^{-\frac{5}{2}t} + \frac{25}{2}c_2(t)e^{-\frac{5}{2}t} - \frac{25}{2}c_2(t)e^{-\frac{5}{2}t} = \\
&= -5c_2'(t)e^{-\frac{5}{2}t} \\
c_2'(t) &= -\frac{1}{5}\cos^2(t)e^{\frac{5}{2}t} = -\frac{1+\cos(2t)}{10}e^{\frac{5}{2}t} \\
c_1'(t) &= -c_2'(t)e^{-\frac{5}{2}t} = \frac{1+\cos(2t)}{10} \\
c_1(t) &= \frac{1}{10}\int (1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{20}(2t + \sin(2t)) \\
c_2(t) &= -\frac{1}{10}\left(\int e^{\frac{5}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int \cos(2t)e^{\frac{5}{2}t}\,\mathrm{d}t\right) = \\
&= -\frac{e^{\frac{5}{2}t}}{10}\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{41}(5\cos(2t) + 4\sin(2t))\right)
\end{aligned}$$

$$\text{Jelikož } \int \cos(2t)e^{\frac{5}{2}t}\mathrm{d}t = \qquad \begin{cases} u(t) & = \cos(2t) \\ u'(t) & = -2\sin(2t) \\ v'(t) & = e^{\frac{5}{2}t} \\ v(t) & = \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}t} \end{cases}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\cos(2t)e^{\frac{5}{2}t} + 2\int \sin(2t)e^{\frac{5}{2}t}\,\mathrm{d}t\right) = \qquad \begin{cases} u(t) & = \sin(2t) \\ u'(t) & = 2\cos(2t) \\ v'(t) & = e^{\frac{5}{2}t} \\ v(t) & = \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{5}\left(\cos(2t)e^{\frac{5}{2}t} + \frac{4}{5}\sin(2t)e^{\frac{5}{2}t} - \frac{8}{5}\int \cos(2t)e^{\frac{5}{2}t}\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \frac{1}{1+\frac{16}{25}} \cdot \frac{2}{5}\left(\cos(2t)e^{\frac{5}{2}t} + \frac{4}{5}\sin(2t)e^{\frac{5}{2}t}\right) = \\ &= \frac{2}{41}\left(5\cos(2t)e^{\frac{5}{2}t} + 4\sin(2t)e^{\frac{5}{2}t}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tedy} \qquad y_P(t) &= \frac{1}{20}\left(2t + \sin(2t)\right) - \frac{1}{10}\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{41}\left(5\cos(2t) + 4\sin(2t)\right)\right) = \\ &= \frac{t}{10} - \frac{1}{25} + \frac{5}{164}\sin(2t) - \frac{1}{41}\cos(2t) \\ \text{Řešení :} \qquad y(t) &= y_P(t) + y_H(t) = \\ &= \underline{\frac{t}{10} - \frac{1}{25} + \frac{5}{164}\sin(2t) - \frac{1}{41}\cos(2t) + c_1 + c_2e^{-\frac{5}{2}t}} \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Link na wolframalpha.

Reference

[MI21-ODR] B. Krajc, P. Beremlijski: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Matematika pro inženýry 21. století, mi21.vsb.cz