MARS - tutoriál 2

1. Příklad: ([MI21-ODR] příklady k procvičení ke kapitole 9, 2.a): Nalezněte maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y'' - \frac{3}{t^2}y' = \frac{1}{t^2} \\ y(3) = 0, \ y'(3) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Řešení:
Funkce $\frac{-3}{t^2}$, $\frac{1}{t^2}$ jsou spojité na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$. Vzhledem k zadaným podmínkám v bodě 3, budeme řešení hledat na intervalu $J = (0, \infty)$. Označíme $z = y'$. Je zřejmé, že pro takto zavedenou funkci z platí

$$\begin{cases} z' - \frac{3}{t^2}z = \frac{1}{t^2} \\ z(3) = -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

což je Cauchyova úloha s lineární diferecniální rovnicí prvního řádu, jejichž řešení jsme probírali v prvním tutoriálu. Použijeme tedy na ní metodu variace konstant:

$$\text{homogenní rovnice: } z' - \frac{3}{t^2}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \frac{z'}{z} = (\ln(z))' \\ \shortparallel \\ \frac{3}{t^2} = \left(-\frac{3}{t}\right)' \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \ln(z(t)) = -\frac{3}{t} + k, \ k \in \mathbb{R} \\ z(t) = ce^{-\frac{3}{t}}, \ c \in \mathbb{R}^+ \end{matrix}$$

$$\text{variace konstant: } z(t) = c(t)e^{-\frac{3}{t}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t^2} = z' - \frac{3}{t^2}z = c'(t)e^{-\frac{3}{t}} + -\frac{3}{t}c(t)e^{-\frac{3}{t}} + \frac{3}{t^2}c(t)e^{-\frac{3}{t}}$$

$$\Rightarrow \quad c'(t) = \frac{e^{\frac{3}{t}}}{t^2} \quad \Rightarrow \quad c(t) = -\frac{1}{3}e^{\frac{3}{t}} + d$$

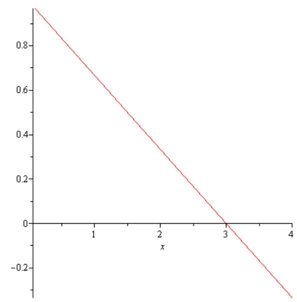
$$\Rightarrow \quad z(t) = \left(d - \frac{1}{3}e^{\frac{3}{t}}\right)e^{-\frac{3}{t}} = de^{-\frac{3}{t}} - \frac{1}{3}$$

$$\text{podmínka C.Ú.: } -\frac{1}{3} = z(3) = d\underbrace{e^{-\frac{3}{t}}}_{>0} - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad d = 0 \quad \Rightarrow \quad z(t) = -\frac{1}{3}$$

Pak ale

$$y(t) = \int z(t)\,\mathrm{d}t + c_\star = -\frac{t}{3} + c_\star \quad \Rightarrow \quad 0 = y(3) = -1 + c_\star \quad \Rightarrow \quad c_\star = 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(t) = \frac{3-t}{3}, \ t \in (0, \infty)}$$

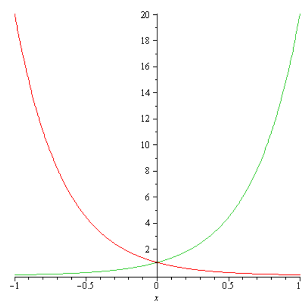


wolframalpha - řešení

2. Příklad: Řešte zadané diferenciální rovnice

   (a) ([Cha-PMII] 462): $y'' - 9y = 0$

$$\lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{3t}}$$

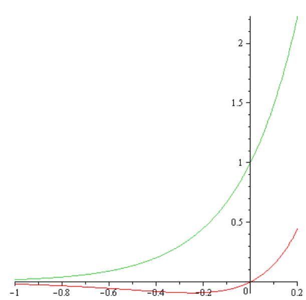


$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$

wolframalpha - řešení

   (b) ([Cha-PMII] 463): $y'' - 8y' + 16y = 0$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y(t) = c_1 t e^{4t} + c_2 e^{4t}}$$

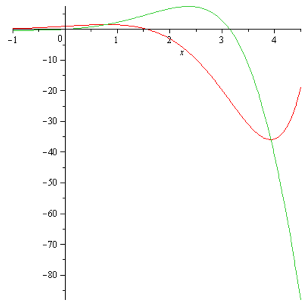


$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$

wolframalpha - řešení

   (c) ([Cha-PMII] 464): $y'' - 2y' + 2y = 0$

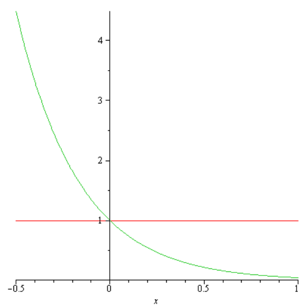
$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i \quad \Rightarrow \quad \underline{y(t) = c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t)}$$



$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$
wolframalpha - řešení

(d) ([Cha-PMII] 465): $y'' + 3y' = 0$

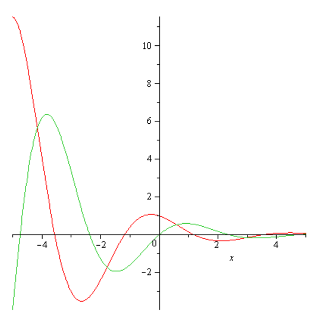
$$\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y(t) = c_1 + c_2 e^{-3t}}$$



$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$
wolframalpha - řešení

(e) ([Cha-PMII] 467): $y'' + y' + 2y = 0$

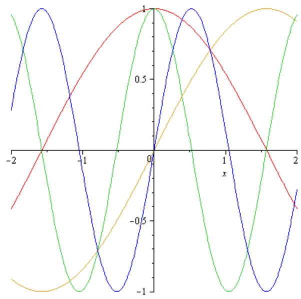
$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{y(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)}$$



$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 1$
wolframalpha - řešení

(f) ([MI21-ODR] příklady k procvičení ke kapitole 9, 3.h): $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$

$$\lambda^4 + 10\lambda^2 + 9 = (\lambda^2 + 9)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \{i, 3i, -1, -3i\}$$
$$\Rightarrow \quad \underline{y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \cos(3t) + c_3 \sin(t) + c_4 \sin(3t)}$$



$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 0$
$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 1$

wolframalpha - řešení

3. Příklad ([MI21-ODR] příklady k procvičení ke kapitole 9, 4): Jak vypadá LDR řádu 4 s konstantními reálnými koeficienty, jestliže kořeny jejího charakteristického polynomu jsou $1,\ 1,\ -3i,\ 3i$:
Řešení:

$$0 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3i)(\lambda + 3i) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 + 3) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 3$$

Hledaná LDR je

$$\underline{y^{(4)} - 2y''' + 4y'' - 6y' + 3y = 0.}$$

4. Příklad ([MI21-ODR] příklady k procvičení ke kapitole 9, 10): Nalezněte řešení zadaných Cauchyových úloh

(a) $\begin{cases} y'' + 9y = \frac{1}{\sin(3t)} \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + 9y = \frac{1}{\sin(3t)} \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,\ y'y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

Řešení:

(a) Ponejprve najdeme interval obsahují číslo $\frac{\pi}{6}$, na kterém je funkce $\frac{1}{\sin(3t)}$ spojitá:

$$0 \neq \sin(3t) \quad \Rightarrow \quad 3t \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\} \quad \Rightarrow \quad t \notin \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\frac{\pi}{3}\}.$$

Počítat budeme tedy na intervalu $J = (0, \frac{\pi}{3})$. Hledáme na J řešení zadané diferenciální rovnice:

$$\text{homogenní rovnice: } \lambda^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)$$

$$\text{variace konstant: } y_p(t) = c_1(t)\cos(3t) + c_2(t)\sin(3t) \ \wedge\ y_p'' + 9y_p = \frac{1}{\sin(3t)}.$$

Ve shodě s návodem v [MI21-ODR] vypočteme

$$y_p'(t) = \overbrace{c_1'(t)\cos(3t) + c_2'(t)\sin(3t)} - 3c_1(t)\sin(3t) + 3c_2(t)\cos(3t)$$

a položíme označenou část rovnu nule:

$$c_1'(t)\cos(3t) + c_2'(t)\sin(3t) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2'(t) = -c_1'(t)\frac{\cos(3t)}{\sin(3t)} = -c_1'(t)\mathrm{cotg}(3t).$$

Pak je

$$y_p''(t) = -3c_1'(t)\sin(3t) + 3c_2'(t)\cos(3t) - 9c_1(t)\cos(3t) - 9c_2(t)\sin(3t).$$

Dosazením do diferenciální rovnice pro y_p dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(3t)} &= y_p'' + 9y_p = -3c_1'(t)\sin(3t) + 3c_2'(t)\cos(3t) = \\ &= -3c_1'(t)\left(\sin(3t) + \frac{\cos^2(3t)}{\sin(3t)}\right) = -3c_1'(t)\frac{1}{\sin(3t)}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{array}{lcl} c_1'(t) = -\frac{1}{3} & \Rightarrow & c_1(t) = -\frac{t}{3} \\ c_2'(t) = \frac{\mathrm{cotg}(3t)}{3} & & c_2(t) = \frac{1}{3}\int \frac{\cos(3t)}{\sin(3t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\ln(\sin(3t)) \end{array}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = -\frac{t}{3}\cos(3t) + \frac{1}{9}\ln(\sin(3t))\sin(3t)$$

a proto

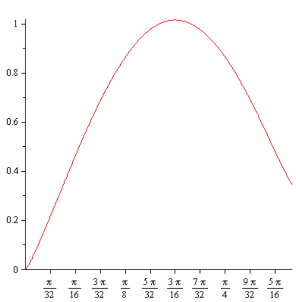
$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) - \frac{t}{3}\cos(3t) + \frac{1}{9}\ln(\sin(3t))\sin(3t) \\ y'(t) &= -3c_1\sin(3t) + 3c_2\cos(3t) + t\sin(3t) + \frac{1}{9}\left[\frac{3\cos(3t)}{\sin(3t)}\sin(3t) + 3\ln(\sin(3t))\cos(3t)\right] \end{aligned}$$

Dosazením do počátečních podmínek dostáváme

$$\begin{array}{lcl} 1 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = c_2 & \Rightarrow & c_2 = 1 \\ \frac{\pi}{6} = y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3c_1 + \frac{\pi}{6} & & c_1 = 0 \end{array}$$

a konečně

$$\underline{y(t) = \sin(3t) - \frac{t}{3}\cos(3t) + \frac{\ln(\sin(3t))}{9}\sin(3t) \text{ na } t \in (0, \frac{\pi}{2})}.$$



wolframalpha

Reference

[MI21-ODR] B. Krajc, P. Beremlijski: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Matematika pro inženýry 21. století, mi21.vsb.cz

[Cha-PMII] J. Charvát, M. Hála, V. Kelar, Z. Šibrava: *Příklady k matematice II*, skriptum ČVUT 1999

[Kop-PMFII] Kopáček a kolektiv: Příklady z matematiky pro fyziky II, Matfyzpress 2003