1. Nalezněte Taylorův polynom třetího řádu k funkci $f(x) = \sin(x)\sqrt{1+x}$ v bodě $x_0 = 0$.
   wolframalpha
2. Pomocí Taylorova polynomu zapište polynom $p(x) = 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ pomocí mocnin $(x+2)$, tedy ve tvaru $p(x) = \alpha_5(x+2)^5 + \cdots + \alpha_0(x+2)^0$.
   wolframalpha
3. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{(x^2-5)^3}{125}$.
4. Najděte nějakou z funkcí, jejíž derivací je funkce $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$.
   wolframalpha

Řešení

1.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0\\
f'(0) &= \left(\cos(x)\sqrt{1+x} + \frac{\sin(x)}{2\sqrt{1+x}}\right)_{|x=0} = 1\\
f''(0) &= \left(-\sin(x)\sqrt{1+x} + \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+x}} + \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+x}} - \frac{\sin(x)}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right)_{|x=0} = 1\\
f'''(0) &= \left(-\cos(x)\sqrt{1+x} - \frac{\sin(x)}{2\sqrt{1+x}} - \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}} - \frac{\cos(x)}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos(x)}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\sin(x)}{8(1+x)^{\frac{5}{2}}}\right)_{|x=0} = -\frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

A tedy

$$T_{3,x_0=0}(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i = 0x^0 + 1x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{-\frac{7}{4}}{6}x^3 = \underline{x + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{24}x^3}$$

2. Pro konstrukci Taylorova polynomy zvolíme x_0 tak aby $(x - x_0) = (x + 2) \Longrightarrow x_0 = -2$. Jelikož výsledný Taylorův polynom je polynom, který nejlépe aproximuje p v okolí x_0 a jelikož p aproximuje p přesně, zvolíme stupeň Taylorova polynomu stejný jako p, tedy 5. Spočteme derivace:

$$
\begin{aligned}
p(-2) &= -321 & p'''(-2) &= \left(360x^2 - 120x + 24\right)_{|x=-2} = 1704\\
p'(-2) &= \left(30x^4 - 20x^3 + 12x^2 - 6x + 2\right)_{|x=-2} = 702 & p^{(iv)}(-2) &= (720x - 120)_{|x=-2} = -1560\\
p''(-2) &= \left(120x^3 - 60x^2 + 24x - 6\right)_{|x=-2} = -1254 & p^{(v)}(-2) &= 720
\end{aligned}
$$

A proto

$$
\begin{aligned}
\underline{p(x)} &= T_{5,x_0=-2}(x) = \sum_{i=0}^{5} \frac{f^{(i)}(-2)}{i!}(x+2)^i =\\
&= \underline{-321 + 702(x+2) - 627(x+2)^2 + 284(x+2)^3 - 65(x+2)^4 + 6(x+2)^5}
\end{aligned}
$$

3. (a) <u>Definiční obor</u>: $Df = \mathbb{R}$
   (b) <u>Spojitost</u>: f je polynom, tudíž spojitá na $\mathbb{R}$

4. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}\right)' \Longrightarrow \underline{F(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}}$.