1. Určete lokální extrémy funkce

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\frac{1}{x}} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
   wolframalpha

   (b) $f(x) = \left|x^2 + x - 2\right| - \left|x^2 - 3x + 2\right|$
   wolframalpha

2. Určete největší objem kužele vepsaného do koule o poloměru r.

3. Průřez tunelu má tvar obdélníka s přilehlým půlkruhem. Obvod celého průřezu je 20 m. Při jakém poloměru bude obsah průřezu největší?

4. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.

Řešení

1. (a) $Df = \mathbb{R}$; f je spojitá na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$; jak je to se spojitostí v nule?

$$\lim_{x\to 0+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-2}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-x^{-2}\right)}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^{-1}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-x^{-2}\right)}{-2x^{-2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = \infty$$

a $\lim\limits_{x\to 0-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0$, tedy f je spojitá zleva v nule, tedy je spojitá na $(-\infty, 0\rangle$.

$f'(x) = 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2 e^{\frac{1}{x}}\left(-x^{-2}\right) = e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$; $Df' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; f' je spojitá na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$;

I	f' je uvnitř I	f je na I
$(-\infty; 0\rangle$	< 0	klesající
$(0; \frac{1}{2}\rangle$	< 0	klesající
$\langle\frac{1}{2}; \infty)$	> 0	rostoucí

$\left(f \text{ je klesající na } (0; \tfrac{1}{2}\rangle\right) \wedge \left(f \text{ je rostoucí na } \langle\tfrac{1}{2}; \infty)\right) \wedge \left(f \text{ je spojitá v } \tfrac{1}{2}\right) \Longrightarrow f$ má v $\frac{1}{2}$ ostré lokální minimum

$\left(f \text{ je klesající na } (-\infty; 0\rangle\right) \wedge \left(f \text{ je klesající na } (0; \tfrac{1}{2}\rangle\right) \wedge \left(f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{e^2}{4} > 0 = f(0)\right) \Longrightarrow f$ má v 0 ostré lokální minimum

(b) $Df = \mathbb{R}$; f je spojitá na $\mathbb{R}$. $\left(\left|x^2 + x - 2\right| = 0 \implies x \in \{-2, 1\}\right)$; $\left(\left|x^2 - 3x + 2\right| = 0 \implies x \in \{1, 2\}\right)$

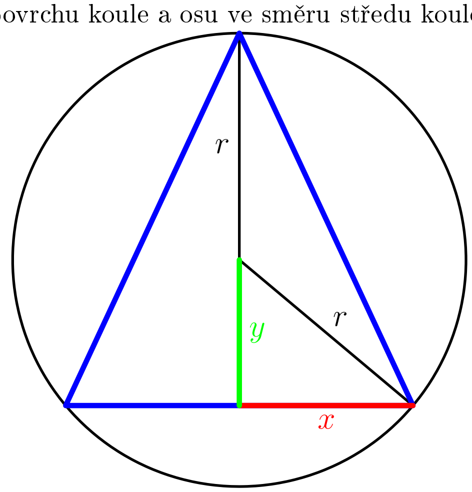
$$f = \begin{cases} \left(x^2 + x - 2\right) + \left(x^2 - 3x + 2\right) = 2x(x-1) & x \in (-\infty, -2\rangle \\ -\left(x^2 + x - 2\right) + \left(x^2 - 3x + 2\right) = -4(x-1) & x \in \langle -2, 1\rangle \\ \left(x^2 + x - 2\right) - \left(x^2 - 3x + 2\right) = 4(x-1) & x \in \langle 1, 2\rangle \\ \left(x^2 + x - 2\right) + \left(x^2 - 3x + 2\right) = 2x(x-1) & x \in \langle 2, \infty) \end{cases} \implies f' = \begin{cases} 4x - 2 & x \in (-\infty, -2) \\ -4 & x \in (-2, 1) \\ 4 & x \in (1, 2) \\ 4x - 2 & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

I	f' je uvnitř I	f je na I
$(-\infty, -2\rangle$	< 0	klesající
$\langle -2, 1\rangle$	< 0	klesající
$\langle 1, 2\rangle$	> 0	rostoucí
$\langle 2; \infty)$	> 0	rostoucí

f má v 0 ostré lokální minimum

---

2. Hledaný kužel bude zřejmě mít vrchol na povrchu koule a osu ve směru středu koule. To se dá představit na obrázku:



který je řezem hledaného kužele a koule. Podrobněji si o tom povíme na cvičení. Označme si poloměr podstavy kužele symbolem x a výšku kužele $h(x) = y(x) + r$. Je zřejmé, že $x \in \langle 0, r\rangle$ a $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Objem kužele vypočteme jako

$$V(x) = \frac{1}{3} S_p(x) \cdot h(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \left(r + \sqrt{r^2 - x^2}\right),$$

kde $V(x)$ je zřejmě pojitá na $\langle 0, r\rangle$. Hledáme

$$\max_{x \in \langle 0, r\rangle} V(x).$$

Derivace

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\left[2xr + 2x\sqrt{r^2-x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{r^2-x^2}}(-2x)\right] = \frac{2\pi x}{3}\left[\frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right] =$$
$$= \frac{2\pi x}{3}\left[\frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-\frac{3x^2}{2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right]$$

je spojitá na $(0, r)$ a

$$\Big(V'(x)=0 \text{ na } (0,r)\Big) \iff \Big(r\sqrt{r^2-x^2} = \frac{3x^2}{2} - r^2\Big) \implies \Big(r^4 - r^2x^2 = \frac{9}{4}x^4 - 3x^2r^2 + r^4\Big)$$
$$\iff \Big(2r^2x^2 = \frac{9}{4}x^4\Big) \iff \Big(\frac{8r^2}{9} = x^2\Big) \iff \Big(x = \frac{2r\sqrt{2}}{3} \in (0,r)\Big).$$

Protože v předchozí sekvenci úprav je symbol „$\implies$“, tak jenom víme, že $x \in (0, r)$ takové, že $V'(x) = 0$ může být jedině $x = \frac{2r\sqrt{2}}{3}$. Dosazením

$$V'(\frac{2r\sqrt{2}}{3}) = \frac{2\pi}{3}\frac{2r\sqrt{2}}{3}\left[\frac{r\sqrt{r^2-\frac{8}{9}r^2}+r^2-\frac{3\frac{8}{9}r^2}{2}}{\sqrt{r^2-\frac{8}{9}r^2}}\right] = \frac{4\sqrt{2}\pi r}{9}\left[\frac{\frac{r^2}{3}+r^2-\frac{4r^2}{3}}{\frac{r^2}{3}}\right] = 0$$

potvrdíme, že tomu tak skutečně je. Dále

I	f' je uvnitř I	f je na I
$\langle 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}r\rangle$	< 0	klesající
$\langle \frac{2\sqrt{2}}{3}r, r\rangle$	> 0	rostoucí

protože

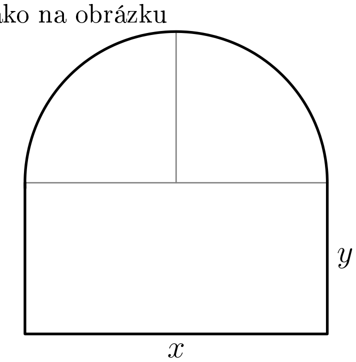
$$V'\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{\pi}{3}r\left[\frac{r\frac{\sqrt{3}}{2}r + r^2 - \frac{3}{8}r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}r}\right] = \frac{\pi}{24}(4\sqrt{3}+5)r^2 > 0\,, \quad \frac{r}{2} \in (0, \frac{2\sqrt{2}}{3}r)$$
$$V'\left(\frac{19r}{20}\right) = \frac{19\pi}{30}r\left[\frac{r\sqrt{\frac{39}{400}r^2}+r^2-\frac{3\frac{361}{400}r^2}{2}}{\sqrt{\frac{39}{400}r^2}}\right] = \frac{19\pi}{30}r\left[\frac{\frac{\sqrt{39}}{20}r^2+r^2-\frac{1083}{800}r^2}{\frac{\sqrt{39}}{20}r}\right] =$$
$$= \frac{2\cdot 19\pi}{3\sqrt{39}}\cdot\frac{\overbrace{\sqrt{39}+800-1083}^{<0}}{800}r^2 < 0\,, \quad \frac{r}{2} \in (\frac{2\sqrt{2}}{3}r, r)$$

a na intervalech $(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}r)$ a $(\frac{2\sqrt{2}}{3}r, r)$ nemění V' znaménko. Proto je V rostoucí na $\langle 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}r\rangle$ a klesající na $\langle \frac{2\sqrt{2}}{3}r, r\rangle$ a tudíž má v $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$ ostré lokální maximum $V(\frac{2\sqrt{2}}{3}r) = \frac{1}{3}\pi\frac{8}{9}r^2\left(r+\frac{r}{3}\right) = \frac{32}{81}\pi r^3$. Vzhledem k tomu, že $V(0) = 0$, $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^3$ a $0 < \frac{1}{3}\pi r^3 < \frac{32}{81}\pi r^3$, je $\max_{x\in\langle 0,r\rangle} V(x) = \frac{32}{81}\pi r^3$.

Hledaný kužel má tedy objem $\frac{32}{81}\pi r^3$, poloměr podstavy $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$ a výšku $\frac{4}{3}r$.

---

3. Průřez tunelem popíšeme konstantami x a y, jako na obrázku



Víme, že obvod $o = 20$ a tedy

$$\Big(20 = o = x + 2y + \pi\frac{x}{2}\Big) \Longrightarrow \Big(y = \frac{20 - (1+\frac{\pi}{2})x}{2} = \frac{40 - (2+\pi)x}{4}\Big).$$

Nejmenší velikost y je 0 a proto $x \in \langle 0, \frac{40}{2+\pi}\rangle$. Obsah průřezu tunelu vyjádříme v závislosti na proměnné x jako

$$S(x) = x\,y(x) + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{40x - (2+\pi)x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{80x + (\pi - 4)x^2}{8},$$

kde S je spojitá funkce na $\langle 0, \frac{40}{2+\pi}\rangle$. V krajních bodech zkoumaného intervalu je

$$S(0) = 0, \quad S(\frac{40}{2+\pi}) = 0 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\frac{40}{2+\pi}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{20}{2+\pi}\right)^2 = \frac{200\pi}{(2+\pi)^2}.$$

Uvnitř intervalu je

$$S'(x) = 10 + \frac{(\pi - 4)x}{4}$$

spojitá funkce a $\Big(S'(x) = 0\Big) \Longrightarrow \Big(x = \frac{40}{4-\pi} \notin (0, \frac{40}{2+\pi})\Big)$. Funkce S' tedy na $(0, \frac{40}{2+\pi})$ nemění znaménko a S je tedy na $\langle 0, \frac{40}{2+\pi}\rangle$ ryze monotónní, konkrétně vzhledem k tomu, že $S(0) = 0$ a $S(\frac{40}{2+\pi}) = \frac{200\pi}{(2+\pi)^2}$ je S na $\langle 0, \frac{40}{2+\pi}\rangle$ rostoucí.
Největší obsah průřezu má tunel $x = \frac{40}{2+\pi}$, $y = 0$ a to $S(\frac{40}{2+\pi}) = \frac{200\pi}{(2+\pi)^2}$.

---

4. (a) Definiční obor: $1 + x^2 \in (0, \infty) \Longrightarrow$ $Df = \mathbb{R}$

   (b) Spojitost: arctg je spojitá na $\mathbb{R}$, ln je spojitá na $(0, \infty)$, $1 + x^2 \in (1, \infty) \subset (1, \infty) \Longrightarrow$ f je spojitá na $\mathbb{R}$

   (c) Zda je f sudá, lichá, periodická: Jelikož

   $$f(-x) = \mathrm{arctg}(-x) - \frac{1}{2}\ln(1 + (-x)^2) = -\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$$

   není pro všechny $x \in Df$ rovna $f(x)$ ani $-f(x)$, a vzhledem k tomu, že nekonstantní periodická funkce nemůže mít v nekonečnu limitu a

   $$f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) \neq -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) = f(-1), \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \Big(\lim_{x\to\infty}\mathrm{arctg}(x)\Big) - \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to\infty}\ln(1+x^2)\Big) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\infty = -\infty,$$

   tak f není sudá, lichá, ani periodická

   (d) Jednostranné limity v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti funkce:

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(\lim_{x\to-\infty}\mathrm{arctg}(x)\right) - \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\infty}\ln(1+x^2)\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\infty = -\infty$$

   (e) Derivace funkce:

   $$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1-x}{1+x^2}$$

   je spojitá na $\mathbb{R}$.

   (f) Intervaly ryzí monotonie, lokální extrémy: Jelikož

   $$Df' = \mathbb{R}, \quad \Big(f'(x) = 0\Big) \Longleftrightarrow \Big(x = 1\Big),$$

   nemění f na $(-\infty, 1\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$ monotonii. Navíc $f'(0) = 1$, $f'(2) = -\frac{1}{5}$ a tedy

I	f' je uvnitř I	f je na I
$(-\infty, 1\rangle$	> 0	rostoucí
$\langle 1, \infty)$	< 0	klesající

   Funkce f je rostoucí na $(-\infty, 1\rangle$, klesající na $\langle 1, \infty)$ a má ostré lokální maximum $f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) \doteq 0.4388$

(g) Intervaly ryzí konvexity a ryzí konkávnosti, inflexe: Protože

$$f''(x) = \frac{-(1+x^2)-(1-x)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2} = \frac{\big(x-(1-\sqrt{2})\big)\,\big(x-(1+\sqrt{2})\big)}{(1+x^2)^2}, \quad Df'' = \mathbb{R},$$

zachovává f na intervalech $(-\infty, 1-\sqrt{2}\rangle$, $\langle 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\rangle$ a $\langle 1+\sqrt{2}, \infty)$ ryzí konvexitu, či ryzí konkávnost a protože $f''(-1) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = -1$ a $f(3) = \frac{1}{50}$ je

I	f'' je uvnitř I	f je na I ryze
$(-\infty, 1-\sqrt{2}\rangle$	> 0	konvexní
$\langle 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\rangle$	< 0	konkávní
$\langle 1+\sqrt{2}, \infty)$	> 0	konvexní

Funkce f je ryze konvexní na $(-\infty, 1-\sqrt{2}\rangle$ a na $\langle 1+\sqrt{2}, \infty)$, ryze konkávní na $\langle 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\rangle$;

f má inflexi v bodech $x \in \{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$.

(h) Asymptoty funkce:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} \overset{(l'H)}{=} 0 - \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = 0$$

a stejným postupem získáme $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Limity

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 0x = -\infty = \lim_{x\to\infty} f(x) - 0x$$

jsme již dříve vypočetli. Funkce f nemá svislé asymptoty ani asymptotu v ∞, či v ∞.

(i) Další vlastnosti funkce: Průsečíkem s osami je zajisté bod $[0,0]$, druhý lze určit již jen přibližně: $[3.503, 0]$. Dále

$$f(1-\sqrt{2}) = \operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\ln(1+(1-\sqrt{2})^2) \doteq -0.4719, \quad f(1+\sqrt{2}) = \operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\ln(1+(1-\sqrt{2})^2) \doteq 0.218$$

$$f'(1-\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \doteq 1.207, \quad f'(1+\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \doteq -0.2071$$

(j) Graf: