1. Teď, když znáte l'Hospitalovo pravidlo, vypočtete limity

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^6}$
   wolframalpha

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$ pro $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
   wolframalpha

   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(x)$
   wolframalpha

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$
   wolframalpha

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(x) - 2 + x^2}{x^2 \sin^2(x)}$
   wolframalpha

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{2x} - 2x - 1)\mathrm{tg}(x+1)}{\cos(6x)\sin^2(3x)}$
   wolframalpha

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}(x) - \arcsin(x)}{\mathrm{tg}(x) - \sin(x)}$
   wolframalpha

2. Urči tečnu funkce $f(x) = (2 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ v bodě $[1, f(1)]$.
   wolframalpha

3. Najděte rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = x\ln(x)$, která je rovnoběžná s přímkou $p:\ 2x - 2y + 3\pi = 0$.
   wolframalpha

4. Určete intervaly ryzí monotonie funkce

   (a) $f(x) = x^3 - 3x - 5$
   wolframalpha

   (b) $f(x) = x^2 \sin(x)$ pro $\mathrm{D}f = < -\pi, \pi >$
   wolframalpha

## Řešení

1. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^6} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x^5} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{6\cdot 5x^4} \overset{\text{l'H}}{=} \cdots = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{6!} = \underline{\infty}$

   (b) $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{nx^{n-1}}{mx^{m-1}} = \underline{\frac{n}{m}}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = \underline{0}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x - 1 - \ln(x)}{(x-1)\ln(x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln(x) + \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{1-\frac{1}{x}}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \underline{\frac{1}{2}}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 2 + x^2}{x^2\sin^2(x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin(x) + 2x}{2x\sin^2(x) + x^2\cdot \underbrace{2\sin(x)\cos(x)}_{\sin(2x)}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\,(-\sin(x) + x)}{2x\sin^2(x) + x^2\sin(2x)} \overset{\text{l'H}}{=}$

   $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2(-\cos(x) + 1)}{2\sin^2(x) + 2x\sin(2x) + 2x\sin(2x) + x^2\cos(2x)\cdot 2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos(x) + 1}{\sin^2(x) + 2x\sin(2x) + x^2\cos(2x)} \overset{\text{l'H}}{=}$

   $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sin(2x) + 2\sin(2x) + 2x\cos(2x)\cdot 2 + 2x\cos(2x) - x^2\sin(2x)\cdot 2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{(3 - 2x^2)\sin(2x) + 6x\cos(2x)} \overset{\text{l'H}}{=}$

   $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{-4x\sin(2x) + (3 - 2x^2)\cos(2x)\cdot 2 + 6\cos(2x) - 6x\sin(2x)\cdot 2} = \frac{1}{6+6} = \underline{\frac{1}{12}}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{2x} - 2x - 1)\mathrm{tg}(x+1)}{\cos(6x)\sin^2(3x)} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x+1)}{\cos(6x)}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{\sin^2(3x)}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \mathrm{tg}(1)\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^{2x} - 2}{\underbrace{2\sin(3x)\cos(3x)}_{\sin(6x)}\cdot 3}\right) \overset{\text{l'H}}{=}$

   $= \mathrm{tg}(1)\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{4e^{2x}}{3\cos(6x)\cdot 6}\right) = \underline{\frac{2\mathrm{tg}(1)}{9}}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}(x) - \arcsin(x)}{\mathrm{tg}(x) - \sin(x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1-x^2} - (1+x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1-\cos^3(x)}{\cos^2(x)}} =$

   $= \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1 - x^2}{1 - \cos^3(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1 - x^2}{1 - \cos^3(x)} \overset{\text{l'H}}{=}$

   $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - 2x}{-3\cos^2(x)\,(-\sin(x))} = \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - 2}{3\cos^2(x)}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)}\right) = \underline{-1}$

2. $f(1) = 1; \quad f'(1) = \left(\frac{3}{2}(2 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot (-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})\right)\Big|_{x=1} = -1; \quad t:\ y - 1 = -(x-1) \implies \underline{t:\ y = -x + 2}$

3. $p:\ y = x + \frac{3\pi}{2} \ldots$ má směrnici $1 \Longrightarrow$ přímka k ní kolmá má směrnici $-1$; $\qquad Df = \mathbb{R}^+$
   Hledáme $x_0:\ (-1 = f'(x_0) = \ln(x_0) + 1)$, tedy $\big(\ln(x_0) = -2\big) \Longrightarrow \big(x_0 = e^{-2},\ f(x_0) = e^{-2}\ln(e^{-2}) = -2e^{-2}\big)$
   Tečna k $f$ v $x_0$: $y - (-2e^{-2}) = -1\cdot(x - e^{-2}) \implies y = -x - e^{-2}$
   Normála k $f$ v $x_0$: $y - (-2e^{-2}) = 1\cdot(x - e^{-2}) \implies \underline{y = x - 3e^{-2}}$

4. (a) $Df = \mathbb{R}; \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)\ \ldots$ je spojitá na $\mathbb{R}$

| $I$ | $f'$ je uvnitř $I$ | $f$ je na $I$ |
|---|---|---|
| $(-\infty; -1\rangle$ | $> 0$ | rostoucí |
| $\langle -1; 1\rangle$ | $< 0$ | klesající |
| $\langle 1; \infty)$ | $> 0$ | rostoucí |

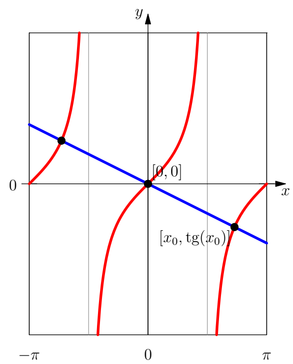
$$f \text{ je } \begin{cases} \text{rostoucí} & \text{na } (-\infty; -1\rangle \text{ a na } \langle 1; \infty) \\ \text{klesající} & \text{na } \langle -1; 1\rangle \end{cases}$$

(b) $Df =< -\pi, \pi >$; $f$ je lichá $\implies f'$ je sudá; Omezíme se na $\langle 0, \pi \rangle$

$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x) = x\,(2\sin(x) + x\cos(x))$ ... je spojitá na $(-\pi, \pi)$

$f'(x) = 0 \iff \Big(x = 0\Big) \vee \Big(2\sin(x) = -x\cos(x)\Big) \iff \Big(x = 0\Big) \vee \Big(\mathrm{tg}(x) = -\frac{x}{2}\Big)$

Z grafu funkcí tg a $-\frac{x}{2}$ je zřejmé, že na $(0, \pi)$ se tyto funkce protnou v jediném bodě, který označíme $x_0$. Tento nejde spočíst přesně, pouze lze numericky určit interval, ve kterém se $x_0$ nachází.




| $I$ | $f'$ je uvnitř $I$ | $f$ je na $I$ |
|---|---|---|
| $\langle 0; x_0 \rangle$ | $> 0$ | rostoucí |
| $\langle x_0; \pi \rangle$ | $< 0$ | klesající |

Protože

- na $(0, x_0)$ nemění $f'$ znaménko a $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}(2 + 0) > 0$.
- na $(x_0, \pi)$ je $\Big(\mathrm{tg}(x) > -\frac{x}{2}\Big) \wedge \Big(\cos(x) < 0\Big)$, tedy $\sin(x) < -\frac{x\cos(x)}{2} \implies f' < 0$ na $(x_0, \pi)$

Jelikož je $f$ lichá a $f'$ sudá, lze získanou tabulku rozšířit na:

| $I$ | $f'$ je uvnitř $I$ | $f$ je na $I$ |
|---|---|---|
| $\langle -\pi; -x_0 \rangle$ | $< 0$ | klesající |
| $\langle -x_0; 0 \rangle$ | $> 0$ | rostoucí |
| $\langle 0; x_0 \rangle$ | $> 0$ | rostoucí |
| $\langle x_0; \pi \rangle$ | $< 0$ | klesající |

Funkce $f$ je $\begin{cases} \text{rostoucí} & \text{na } \langle -x_0; x_0 \rangle; \\ \text{klesající} & \text{na } \langle -\pi; -x_0 \rangle \text{ a na } \langle x_0; \pi \rangle \end{cases}$