1. Sestrojte graf funkce f, víte-li:

   - $D(f) = \mathbb{R}$.
   - f je lichá.
   - $f(0) = 0 = f(\frac{3}{2})$.
   - f je periodická s periodou 3.
   - $\big(\forall x \in (0, \frac{3}{2})\big): \ f(x) = 1 - x^2$.

   Vypočítejte $f(1000)$, $f(\pi)$, $f(-\sqrt{2})$.

2. Nalezněte inverzní funkci k funkci f, když $Df = \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$ a $(\forall x \in Df): \ f(x) = \sin(x)$.

3. Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) monotónní, když

   (a) $a_n = n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

   (b) $a_n = 15n + (-2)^n$

   (c) $a_n = \frac{n}{n^3+1}$

4. Rozhodněte, zda je (b_n) vybranou posloupností z posloupnosti (a_n), když

   (a) $a_n = 5^n \qquad b_n = 5^{n+5(-1)^n}$

   (b) $a_n = 5^n \qquad b_n = 5^{5n+(-1)^n}$

   (c) $a_n = 5^n \qquad b_n = 25^{10n^2+5(-1)^n}$

   (d) $a_n = (1 + \sin(n))^n \qquad b_n = \big(1 + \sin(2n^3)\big)^{2n^3}$

   (e) $a_n = (1 + \sin(n))^n \qquad b_n = (1 + \sin(\sqrt{n}))^{\sqrt{n}}$

5. Dokažte, že posloupnost $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ je klesající a omezená.

6. U které aritmetické posloupnosti platí, že $\big(a_1 + a_5 = 30\big) \ \wedge \ \big(a_3 + a_4 = 36\big)$?

7. Velikosti vnitřních úhlů u vrcholů v konvexním n-úhelníku jsou po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti. Nejmenší úhel je $\frac{100}{180}\pi$, každý další úhel je vždy o $\frac{10}{180}\pi$ větší. Kolik stran má n-úhelník?

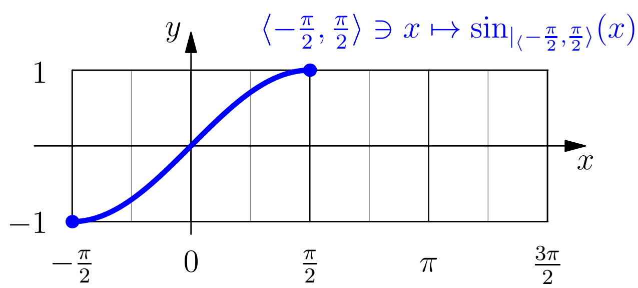
8. U které geometrické posloupnosti platí, že $\left(a_4 = -\frac{8}{3}\right) \ \wedge \ \left(a_6 = -\frac{32}{3}\right)$?

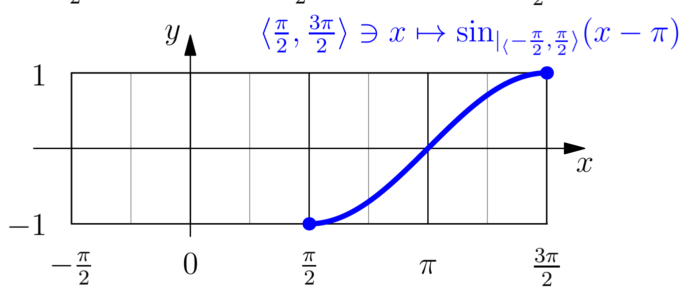
Řešení

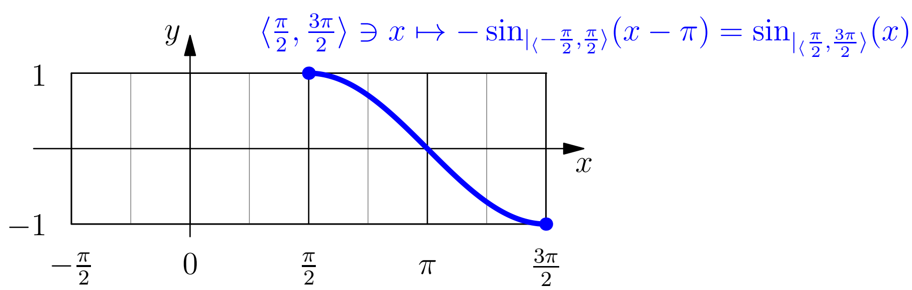
1. Řešení tohoto příkladu uvedu pouze na cvičeních.

2.
   - $Df^{-1} = Hf = \langle -1, 1 \rangle$
   - $\big((\forall x \in Df^{-1}) : y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)\big) \iff$
     $\iff \big((\forall x \in \langle -1, 1 \rangle) : y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \sin(y) \wedge y \in Df = \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle\big) \overset{\sin(z)=-\sin(z-\pi)}{\iff}$
     $\iff \big((\forall x \in \langle -1, 1 \rangle) : y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = -\sin(y-\pi) \wedge y \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle\big) \overset{(y-\pi) \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}{\iff}$
     $\iff \Big((\forall x \in \langle -1, 1 \rangle) : y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow -x = \sin_{|\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}(y-\pi) \wedge y \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle\Big) \overset{\arcsin=\left(\sin_{|\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}\right)^{-1}}{\iff}$
     $\iff \underline{f^{-1}(x) = \pi - \arcsin(x)} \wedge Df^{-1} = \langle -1, 1 \rangle$

     Poznámka:







3. (a) $(\forall n \in \mathbb{N}) : \underline{a_{n+1} - a_n} = (n+1) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} =$
   $1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \underline{> 0} \implies (a_n)$ je rostoucí

   (b) $(\forall n \in \mathbb{N}) : \underline{a_{n+1} - a_n} = 15(n+1) + (-2)^{n+1} - (15n + (-2)^n) =$
   $= 15 - 3(-2)^n \ldots \begin{cases} > 0 & \ldots (n \text{ je liché}) \vee (n = 2) \\ < 0 & \ldots (n \text{ je sudé}) \wedge (n > 2) \end{cases} \implies (a_n)$ není monotónní

   (c) $(\forall n \in \mathbb{N}) : \underline{a_{n+1} - a_n} = \frac{n+1}{(n+1)^3+1} - \frac{n}{n^3+1} = \frac{\overbrace{(n+1)(n^3+1)}^{n^4+n^3+n+1} - \overbrace{n(n^3+3n^2+3n+2)}^{n^4+3n^3+3n^2+2n}}{(n^3+1)(n^3+3n^2+3n+2)} =$

$$= \frac{-\overbrace{(2n^3+3n^2+n-1)}^{>0}}{\underbrace{(n^3+1)}_{>0}\underbrace{(n^3+3n^2+3n+2)}_{>0}} \le 0 \Longrightarrow (a_n) \text{ je klesající}$$

4. (a) $b_n = a_{k_n}$ kde $k_n = n + 5(-1)^n$; $k_1 = -4 \notin \mathbb{N} \Longrightarrow (b_n)$ není vybraná z (a_n)

   (b) $b_n = a_{k_n}$ kde $k_n = 5n + (-1)^n$; $\mathbb{Z} \ni k_n = 5n + (-1)^n \ge 5n - 1 \ge 4 \Longrightarrow k_n \in \mathbb{N}$
   $(\forall n \in \mathbb{N}):\ k_{n+1} - k_n = 5(n+1) + (-1)^{n+1} - (5n + (-1)^n) = 5 - 2(-1)^n \ge 3 > 0 \Longrightarrow k_n$ je rostoucí
   $(b_n = a_{k_n}) \wedge ((k_n)$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel$) \Longrightarrow (b_n)$ je vybraná z (a_n)

   (c) $b_n = 5^{20n^2+10(-1)^n} = a_{k_n}$ kde $k_n = 20n^2 + 10(-1)^n$; $\mathbb{Z} \ni k_n = 10\left(2n^2 + (-1)^n\right) \ge 10 \Longrightarrow k_n \in \mathbb{N}$
   $(\forall n \in \mathbb{N}):\ k_{n+1} - k_n = 10\left(2(n+1)^2 + (-1)^{n+1} - \left(2n^2 + (-1)^n\right)\right) =$
   $= 10\,(4n + 2 - 2(-1)^n) \ge 40n > 0 \Longrightarrow k_n$ je rostoucí
   $(b_n = a_{k_n}) \wedge ((k_n)$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel$) \Longrightarrow (b_n)$ je vybraná z (a_n)

   (d) $b_n = a_{k_n}$ kde $k_n = 2n^3$; $(k_n \in \mathbb{N}) \wedge ((k_n)$ je rostoucí$) \Longrightarrow (b_n)$ je vybraná z (a_n)

   (e) $b_n = a_{k_n}$ kde $k_n = \sqrt{n}$; $k_2 = \sqrt{2} \notin \mathbb{N} \Longrightarrow (b_n)$ není vybraná z (a_n)

5. $$(\forall n \in \mathbb{N}):\ a_{n+1} - a_n = \tfrac{(n+1)+1}{(n+1)} - \tfrac{n+1}{n} = \frac{\overbrace{(n+2)n}^{n^2+2n} - \overbrace{(n+1)^2}^{n^2+2n+1}}{(n+1)n} = \frac{-1}{\underbrace{(n+1)n}_{>0}} < 0 \implies \left(\tfrac{n+1}{n}\right) \text{ je klesající}$$

   Každá klesající posloupnost je shora omezená (svým prvním členem). Navíc $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1 > 0$, tj. posloupnost je také zdola omezená.

6. $(a_n$ je aritmetická$) \Longrightarrow ((\exists \delta \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} = a_n + \delta) \Longrightarrow ((\exists \delta, a_0 \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n = a_0 + n\delta)$
   $\left(a_1 + a_5 = 30\right) \wedge \left(a_3 + a_4 = 36\right) \Longrightarrow \left(2a_0 + 6\delta = 30\right) \wedge \left(2a_0 + 7\delta = 36\right) \Longrightarrow (\delta = 6 \wedge a_0 = -7)$
   Jedná se o posloupnost $a_n = -7 + 6n$.

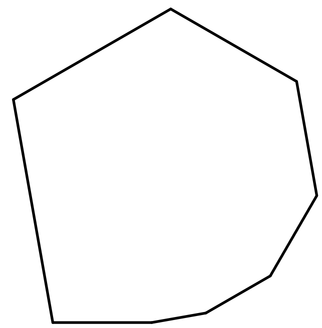
7. Mějme libovolný konvexní n-úhelník a jeho těžiště spojme s každým vrcholem úsečkou. Vznikne nám takto n trojúhelníků. Sečteme-li dohromady všechny vnitřní úhly v těchto trojúhelnících, dostaneme číslo $n\pi$. Každý z trojúhelníků má jeden vrchol v těžišti n-úhelníku a součet úhlů, které těmto vrcholům přísluší je 2π.
   Součet vnitřních úhlů v konvexním n-úhelníku je o 2π větší, než součet úhlů ve všech trojúhelnících, tedy je roven $a_n = n\pi - 2\pi$ a evidentně je aritmentickou posloupností (až na vyjímky a_1 a a_2).
   V zadání popsaný n-úhelník má úhly $b_1 = \frac{100}{180}\pi$, $b_{i+1} = b_i + \frac{10}{180}\pi$, $i = 1, \ldots, n$ a tedy $b_i = \frac{100}{180}\pi + \frac{10(i-1)}{180}\pi$. Jejich součet je

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{100}{180}\pi + \frac{10(i-1)}{180}\pi\right) = \frac{100}{180}\pi n + \frac{10}{180}\pi \sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{100}{180}\pi n + \frac{10}{180}\pi \frac{n(n-1)}{2} =$$
$$= \frac{\pi}{18}\left(10n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) = \frac{\pi}{36}\left(n^2 + 19n\right).$$

   Otázkou zůstává, zdali existuje nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, že $c_n = a_n$. Jelikož

$$(c_n = a_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{\pi}{36}\left(n^2 + 19n\right) = \pi(n-2)\right) \Longleftrightarrow \left(n^2 + 19n = 36(n-2)\right) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \left(n^2 - 17n + 72 = (n-8)(n-9) = 0\right),$$

   zdálo by se, že hledaným n-úhelníkem by mohl být osmiúhelník, nebo devítiúhelník. Jeden z osmiúhelníků zadaných vlastností je na obrázku.



Proč však žádný devítiúhelník nevyhovuje zadání?

8. (a_n je geometrická) $\Longrightarrow ((\exists q \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} = qa_n) \Longrightarrow ((\exists q, a_0 \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n = q^n a_0)$
$\left(a_4 = -\frac{8}{3}\right) \wedge \left(a_6 = -\frac{32}{3}\right) \Longrightarrow \left(q^4 a_0 = -\frac{8}{3} \wedge q^6 a_0 = -\frac{32}{3}\right) \Longrightarrow \left(q^2 = \frac{32}{8} \wedge a_0 = -\frac{32}{3q^4}\right) \Longrightarrow \left(|q| = 2 \wedge a_0 = -\frac{2}{3}\right)$
Zadanou vlastnost splňují posloupnosti $a_n = 2^n(-\frac{2}{3})$ a $a_n = (-2)^n(-\frac{2}{3})$.