1. *Zadání*: Účast Anny, Barbory, Cyrila a Dušana na koncertě je vázána podmínkama, že půjde:

   (a) alespoň jeden chlapec

   (b) nejvýše jedna dívka

   (c) Právě jeden ze sourozenců Anna-Cyril

   (d) Barbora nepůjde bez Dušana

   (e) Anna nepůjde s Dušanem

   Které skupiny z této čtveřice se mohou koncertu zúčastnit? Kdo určitě půjde a kdo určitě nepůjde?

   Řešení: Označme boolovskými proměnnými A, B, C, D zda dotyčný půjde na koncert, nebo nikoli. Současně pak musí platit:

$$\begin{aligned}
&[C \vee D] \wedge \neg\,[A \wedge B] \wedge [(A \vee C) \wedge \neg\,(A \wedge C)] \wedge \neg\,[B \wedge \neg\,(D)] \wedge \neg\,[A \wedge D] \iff \\
&\quad\iff [C \vee D] \wedge [\neg A \vee \neg B] \wedge [A \vee C] \wedge [\neg A \vee \neg C] \wedge [\neg B \vee D] \wedge [\neg A \vee \neg D] \iff \\
&\quad\iff [(A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C)] \wedge [(C \vee D) \wedge (\neg B \vee D)] \wedge [(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg D)] \iff \\
&\quad\iff [(A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg A) \vee (C \wedge \neg C)] \wedge \\
&\qquad\quad \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (C \wedge D) \vee (D \wedge \neg B) \vee (D \wedge D)] \wedge \\
&\qquad\quad \wedge [(\neg A \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg D) \vee (\neg B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge \neg D)]\ .
\end{aligned}$$

   V poslední úpravě jsme využili distributivní pravidlo, tj.:

$$(X_1 \vee \cdots \vee X_m) \wedge (Y_1 \vee \cdots \vee Y_n) = (X_1 \wedge Y_1) \vee \cdots \vee (X_1 \wedge Y_n) \vee (X_2 \wedge Y_1) \vee \cdots \vee (X_m \wedge Y_n)\ .$$

   Dále výrazy zjednodušíme podle pravidel $X \wedge \neg X = 0$, $X \wedge X = X$ a přeskupíme písmena pomocí $X \wedge Y = Y \wedge X$ tak, aby šly dle abecedy:

$$\begin{aligned}
&[(A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C)] \wedge [(\neg B \wedge C) \vee (C \wedge D) \vee (\neg B \wedge D) \vee D] \wedge \\
&\qquad \wedge [\neg A \vee (\neg A \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg D)] \iff \\
&\quad\iff [(A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C)] \wedge [(\neg B \wedge C) \vee D] \wedge [\neg A \vee (\neg B \wedge \neg D)] \iff \\
&\quad\iff [(A \wedge \neg C \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg C \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge C \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge C \wedge \neg B \wedge \neg D)] \wedge \\
&\qquad \wedge [(\neg B \wedge C) \vee D] \iff \\
&\quad\iff [(A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D)] \wedge [(\neg B \wedge C) \vee D] \iff \\
&\quad\iff (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge D) \vee \\
&\qquad \vee (\neg A \wedge C \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C \wedge D) \vee \\
&\qquad \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D \wedge D) \iff \\
&\quad\iff (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \iff \\
&\quad\iff (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C \wedge D)
\end{aligned}$$

   Vidíme, že na koncert musí jít Cyril a nesmí jít Alena. Doplníme-li do poslední úpravy proměnné tak, aby závorky obsahovaly všechny čtyři proměnné, dostaneme kombinace:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge D)$$

   Na koncert tedy mohou jít pouze

   (a) Cyril

   (b) Barbora, Cyril a Dušan

   (c) Cyril a Dušan