

Cvičení 6

1. Příklad ([Bou-SPMA2] 23.a): Najděte Taylorovu polynomickou funkci m -tého řádu funkce

$$f(x, y) = \ln(1 + x) + \ln(1 + y),$$

kde $c = (0, 0)$, $m = 2$.

[Řešení $T_{f,c,m}(x, y) = xy$]

2. Příklad ([Cha-PMII] 9.29): Napište Taylorův vzorec pro funkci $f(x, y) = e^x \ln(y)$ a pro $c = (0, 1)$, $m = 3$.

[Řešení $T_{f,c,m}(x, y) = (y-1) + \frac{1}{2}(2x(y-1) - (y-1)^2) + \frac{1}{6}(3x^2(y-1) - 3x(y-1)^2 + 2(y-1)^3)$]

3. Příklad ([Cha-PMII] 9.30): Užitím Taylorova vzorce z předchozího příkladu vypočítejte přibližně $\sqrt[5]{e} \ln(1.1)$.

[$\sqrt[5]{e} \ln(1.1) \approx \frac{1}{10} + \frac{1}{2}(2 \frac{2}{10} \frac{1}{10} - \frac{1}{100}) + \frac{1}{6}(3 \frac{4}{100} \frac{1}{10} - 3 \frac{2}{10} \frac{1}{100} + 2 \frac{1}{1000}) = \frac{349}{3000} = 0.116\bar{3}$]

4. Příklad (upravený [Cha-PMII] 9.31): Napište Taylorův polynom pro funkci

$$f(x, y, z) = 2(x+1)^2 - (x+1)(z-1) + 3(y-2)^2 - 5(x+1) + 14(y-2) + 19$$

a pro $c = (0, 0, 0)$, $m = 7$.

[trivialita]

5. Příklad ([Bou-SPMA2] 25.a,c): Funkce g (o rovnici $y = g(x)$) je definována implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$ a podmínkou $g(a) = b$. Určete $g'(a)$, $g''(a)$ a $g'''(a)$, je-li

(a) $f(x, y) = x - y + 4 \sin(y)$, $(a, b) = (0, 0)$

[$g'(0) = -\frac{1}{3}$, $g''(0) = 0$, $g'''(0) = -\frac{4}{3^4}$]

(b) $f(x, y) = e^{x-y} - y + x^2 - 1$, $(a, b) = (1, 1)$.

[$g'(1) = \frac{3}{2}$, $g''(1) = \frac{9}{8}$, $g'''(1) = \frac{7}{32}$]

6. Příklad ([Bou-SPMA2] 26): Určete směrnice tečen sestrojovaných ke křivce $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - xy = 4\}$ v jejích průsečících s přímkou $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3\}$.
[tečna v $(3, -1)$: $y + 1 = \frac{1}{5}(x - 3)$, tečna v $(3, 4)$: $y - 4 = \frac{4}{5}(x - 3)$]

7. Příklad ([Cha-PMII] 9.35): Nechť je funkce g (o rovnici $y = g(x)$) definována implicitně rovnicí $x^3 + y^3 = 2x^2 + xy - 1$ a podmínkou $g(1) = 0$. Pomocí Taylorova polynomu třetího řádu funkce g v bodě 1 vypočítejte přibližně $g(1.1)$.

Reference

- [Cha-PMII] J. Charvát, M. Hála, V. Kellar, Z. Šibrava: *Příklady k matematice II*, skriptum ČVUT 1999
- [Bou-SPMA2] J. Bouchala: *Sbírka příkladů z matematické analýzy 2*, elektronické skriptum VŠB 2000