LA, Test 2 - vzorový, (letní semestr 2023)

1. **Příklad** [5b]
   Nechť $B: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je bilineární forma, která je definována $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_2 - 2x_2y_2$.

   (a) Najděte symetrickou B_S a antisymetrickou B_A část bilineární formy B.

   (b) Nalezněte matici $[B]_{\mathcal{F}}$ bilineární formy B vzhledem k bázi $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

   (c) Nalezněte hodnotu $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pro vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, kde $[\mathbf{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ a $[\mathbf{u}]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

2. **Příklad** [2b]
   Klasifikujte kvadratickou formu $Q(\mathbf{x})$ na $\mathbb{R}^3$ s maticí $\mathbf{Q}$ vzhledem ke standartní bázi

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. **Příklad** [2b]
   Vypočtěte determinant

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. **Příklad** [3b]
   Vypočtěte vlastní rozklad $\mathbf{C}$, kde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. **Příklad** [3b]
   Mějme bázi $\mathcal{A}$ prostoru $V = \langle \mathcal{A} \rangle$, který je podprostorem $\mathbb{R}^4$ a sklalární součin $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\top \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

   Pomocí ortonormalizačního procesu vytvořte ortonormální bázi V z $\mathcal{A}$ vzhledem k zadanému skalárnímu součinu.