BF – změna matice BF při změně báze

B_1 $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$, $\mathcal{F}=(f_1,\dots,f_n)$ $\quad V=\langle e_1,\dots,e_n\rangle=\langle f_1,\dots,f_n\rangle$

$\forall u,v\in V$ $\quad B(u,v)=[u]_{\mathcal{E}}^T\,[B]_{\mathcal{E}}\,[v]_{\mathcal{E}}$ $\quad \forall w\in V$ $\quad [w]_{\mathcal{F}}=[P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}\,[w]_{\mathcal{E}}$

$=[u]_{\mathcal{F}}^T\,[B]_{\mathcal{F}}\,[v]_{\mathcal{F}}$, $\quad [B]_{\mathcal{E}}{}_{ij}=B(e_i,e_j)$

$([P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}[u]_{\mathcal{E}})^T\,[B]_{\mathcal{F}}\,[P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}\,[v]_{\mathcal{E}}$

$[u]_{\mathcal{E}}^T\,[P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}^T$

$B(x,y)=1x_1y_1-2x_1y_2-3x_2y_2$ $\quad S=\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$

$\mathcal{E}=\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$

2. $[B]_S$, $[B]_{\mathcal{E}}$

$=\underbrace{[x_1\ x_2]}_{[x]_S^T}\underbrace{\begin{bmatrix}1&-2\\0&-3\end{bmatrix}}_{[B]_S}\underbrace{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}}_{[y]_S}$

$[[B]_S]_{11}=B(s_1,s_1)=1\cdot1\cdot1-2\cdot1\cdot0-3\cdot0\cdot0=1$

$12,21,22$ podobně

$[B]_{\mathcal{E}}{}_{11}=B(e_1,e_1)=1\cdot1\cdot1-2\cdot1\cdot1-3\cdot1\cdot1=-4$

$12=B(e_1,e_2)=1\cdot1\cdot1-2\cdot1\cdot(-1)-3\cdot1\cdot(-1)=6$

$21=B(e_2,e_1)=1\cdot1\cdot1-2\cdot1\cdot1-3\cdot(-1)\cdot1=2$

$22=B(e_2,e_2)=1\cdot1\cdot1-2\cdot1\cdot(-1)-3\cdot(-1)\cdot(-1)=0$

$[B]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}-4&6\\2&0\end{bmatrix}$

$\forall w\in V$: $[w]_S=[P]_{S\leftarrow\mathcal{E}}[w]_{\mathcal{E}}$, $w\in\{e_1,e_2\}$

2 způsoby: $[B]_{\mathcal{E}}=[P]_{S\leftarrow\mathcal{E}}^T[B]_S\,[P]_{S\leftarrow\mathcal{E}}$

$"\ ([e_1]_S,[e_2]_S)=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$

$[B]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&6\\2&0\end{bmatrix}$

KVADRATICKÉ FORMY

$Q(x)=B(x,x)$

$V\to\mathbb{R}$

Př: $B(x,y)=1x_1y_1-2x_1y_2-3x_2y_2$ $\quad [B]_S=\begin{bmatrix}1&-2\\0&-3\end{bmatrix}$

$Q(x)=?=1\cdot\underbrace{x_1x_1}_{x_1^2}-2x_1x_2-3\underbrace{x_2x_2}_{x_2^2}$

$[Q]_S=$ $\quad (+\frac{AC}{2})$

$Q(x)=[x]_S^T[Q]_S[x]_S=(x_1\ x_2)\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_1\end{pmatrix}$

Změna matice QF při změně báze

$(Q)_{\mathcal{F}}=[P]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}}^T[Q]_{\mathcal{E}}[P]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}}$

Př: Najděte bázi $\mathcal{F}$ takovou, že

$Q(x)=x_1^2-2x_1x_2-3x_2^2$ $\quad$ má diagonální $[Q]_{\mathcal{F}}$

$\left[\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\-1&-3&0&1\end{array}\right]$ $\xrightarrow{\text{řádky}}$ $\left[\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\0&-4&1&1\end{array}\right]$ $\xrightarrow{\text{sloupce}}$ $\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\0&-4&1&1\end{array}\right]$

$[Q]_S\ |\ I$ $\quad T_1[Q]_S\ |\ T_1I$ $\quad T_1[Q]_ST_1^T\ |\ T_1$

$[Q]_{\mathcal{F}}$ $\quad [P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}^T$