BILINEÁRNÍ FORMY

V, W – vektorové prostory

- Definice
- Sym. x antisymetrická část
- matice BF.
- změna matice při změně báze

$B : V \times W \to \mathbb{R}$

v tomto kurzu $W = V$

$$B(\alpha v_1 + \beta v_2, \gamma w_1 + \delta w_2)$$
$$\|$$

linearita v první složce: $\alpha B(v_1, \gamma w_1 + \delta w_2) + \beta B(v_2, \gamma w_1 + \delta w_2) =$

linearita v 2 složce: $\alpha[\gamma B(v_1, w_1) + \delta B(v_1, w_2)] +$

$+ \beta[\gamma B(v_2, w_1) + \delta B(v_2, w_2)] =$

$$= \alpha\gamma B(v_1, w_2) + \alpha\delta B(v_1, w_2) + \beta\gamma B(v_2, w_1) + \beta\delta B(v_2, w_2)$$

Př.: Je zobrazení $B : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$

$$B(p,q) = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q'(x)\, dx \qquad \text{bilineární forma?}$$

- P_2, P_2 jsou V.P.
- Linearita – a) v první složce: $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ $(\forall p, q, p_1, q_1, p_2, q_2 \in P_2)$

  b) v 2 složce

$B(\alpha p_1 + \beta p_2, q) = \alpha B(p_1, q) + \beta B(p_2, q)$?

$B(p, \alpha q_1 + \beta q_2) = \alpha B(p, q_1) + \beta B(p, q_2)$

$$B(\alpha p_1 + \beta p_2, q) = \int_{-1}^{1} \left(\boxed{\alpha p_1(x) + \beta p_2(x)}\right) \cdot \left(\boxed{q(x)}\right)' dx = \int_{-1}^{1} [\alpha p_1(x) q'(x) + \beta p_2(x) q'(x)]\, dx$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1} p_1(x) q'(x)\, dx + \beta \int_{-1}^{1} p_2(x) q'(x)\, dx = \alpha B(p_1, q) + \beta B(p_2, q)$$

$$B(p, \alpha q_1 + \beta q_2) = \int_{-1}^{1} \left(\boxed{p}\right) \cdot \left([\alpha q_1 + \beta q_2]\right)' dx = \int_{-1}^{1} p \cdot \alpha q_1'(x)\, dx + \int_{-1}^{1} p \beta q_2'(x)\, dx = \alpha B(p, q_1) + \beta B(p, q_2)$$

- Rozklad B.F. na symetrickou a antisymetrickou část.

$B : V \times W \to \mathbb{R}$, $V = W$!!!

$$B(u,v) = B(u,v) \pm \tfrac{1}{2} B(v,u) = \underbrace{\tfrac{1}{2}[B(u,v) + B(v,u)]}_{B_S(u,v)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}[B(u,v) - B(v,u)]}_{B_A(u,v)}$$

- symetrická $S(u,v) = S(v,u)$
- Antisymetrická $A(u,v) = -A(v,u)$

Př: Najděte symetrickou část B.F. $B : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$

$$B(p,q) = p(0) \cdot q(0) + p(2) q(\pi)$$

- Matice $B : V \times U \to \mathbb{R}$ $\qquad V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$

$$B(u,v) = [u]_\varepsilon^T [B]_\varepsilon [v]_\varepsilon$$

$$\boxed{([B]_\varepsilon)_{ij} = B(e_i, e_j)}$$

$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$v = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$

$[u]_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ $\quad [v]_\varepsilon = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$

Př z minulého př. najděte

$[B]_\varphi \qquad [B_S]_\varphi \qquad [B_A]_\varphi \qquad \varphi = (\overset{s_1}{\text{"1"}}, \overset{s_2}{\text{"x"}})$

$p(0)q(0) + p(2)q(\pi) = B(p,q)$

$$\begin{bmatrix} 2 & \pi \\ 2 & 2\pi \end{bmatrix} = [B]_\varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{\pi+2}{2} \\ \frac{\pi+2}{2} & 2\pi \end{bmatrix} = [B_S]_\varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi-2}{2} \\ \frac{2-\pi}{2} & 0 \end{bmatrix} = [B_A]_\varepsilon$$

$B(s_1, s_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$

$B(s_1, s_2) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot \pi = \pi$

$B(s_2, s_1) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2$

$B(s_2, s_2) = 0 \cdot 0 + 2 \cdot \pi = 2\pi$