4 ZMĚNA SOUŘADNIC

• LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

⋮

Změna souřadnic

Máme • V.P V
• $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ jsou báze V

$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$
$\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$

$v \in V$ $\quad [v]_{\mathcal{E}} \overset{??}{\rightleftarrows} [v]_{\mathcal{F}}$

$\forall v \in V: \quad \boxed{[v]_{\mathcal{F}} = [P]_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} [v]_{\mathcal{E}}}$ $\quad [P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$ matice přechodu od starých souřadnic $\mathcal{E}$ k novým $\mathcal{F}$.

Jak zjistit $[P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$??

Př: $\mathcal{E} = (x^2+x+1,\ x+1,\ x-1)$
$\mathcal{F} = (x^2+1,\ x^2-1,\ x^2-x)$

• Určete $[P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$ $\quad \forall v \in V: \quad [v]_{\mathcal{F}} = [P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{E}}$

Dosazení $v = e_\#,\ \# \in \{1,2,3\}$ $\quad [e_\#]_{\mathcal{F}} = [P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} [e_\#]_{\mathcal{E}}$

$\# = 1, 2, 3$: $\quad [e_\#]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$[e_1]_{\mathcal{F}} = [P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
$[e_2]_{\mathcal{F}} = \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$
$[e_3]_{\mathcal{F}} = \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\Big[[e_1]_{\mathcal{F}}, [e_2]_{\mathcal{F}}, [e_3]_{\mathcal{F}}\Big] = \underbrace{[P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} \cdot I}_{[P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}}$

$[P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} = \Big[[x^2+x+1]_{\mathcal{F}}, [x+1]_{\mathcal{F}}, [x-1]_{\mathcal{F}}\Big]$

$\begin{bmatrix}\alpha_1^1\\ \alpha_2^1\\ \alpha_3^1\end{bmatrix}$ $\quad \boxed{\alpha_1^\# f_1 + \alpha_2^\# f_2 + \alpha_3^\# f_3 = e_\#}$

$\alpha_1^\#\ \text{"}x^2+1\text{"} + \alpha_2^\#\ \text{"}x^2-1\text{"} + \alpha_3\ \text{"}x^2-x\text{"} = \text{"}x^2+x+1\text{"},\ \text{"}x+1\text{"},\ \text{"}x-1\text{"}$

$[f_1\ f_2\ f_3] \begin{bmatrix}\alpha_1^\#\\ \alpha_2^\#\\ \alpha_3^\#\end{bmatrix} = e_\#$

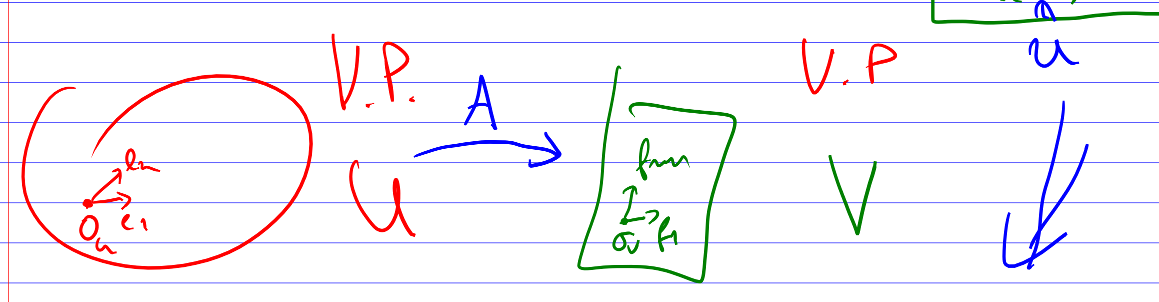
$$\begin{array}{c} \text{"}x^2\text{"} \\ \text{"}x\text{"} \\ \text{"}1\text{"} \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-v_2]{v_3-v_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[v_2+v_3]{v_1-v_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} v_1+\frac{1}{2}v_2 \\ -\frac{1}{2}v_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} I & 3/2 & 1 & 0 \\ & 1/2 & 0 & 1 \\ & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \to [P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$$

Jak by vypadala matice $[P]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}}$? $\quad$ O: $\left([P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}\right)^{-1}$

LINEÁRNÍ ZOBR.

$\boxed{A(u) = v}$, $u \in U$, $v \in V$



$A(\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 A(u_1) + \dots + \alpha_k \cdot A(u_k)$

Př: $A: P_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad$ ∴ je Lin. zobr.

$A(\underbrace{\text{"}x^2+x+1\text{"}}_{e_1}) = \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$
$A(\underbrace{\text{"}x^2+1\text{"}}_{e_2}) = \begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}$
$A(\underbrace{\text{"}x^2-1\text{"}}_{e_3}) = \begin{bmatrix}\pi&\pi\\ \pi&2\pi\end{bmatrix}$
$\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$

1• $A(\text{"}4x^2+3x+6\text{"}) = ?$
2• $\mathrm{Ker}(A) = N(A) = ?$
3• $\mathcal{H}(A) = ?$
4• $[A]_{\tilde{\mathcal{E}},\mathcal{F}} = ?$

už nic

① $A(\text{"}4x^2+3x+6\text{"}) = A(\alpha_1 \cdot \text{"}x^2+x+1\text{"} + \alpha_2\ \text{"}x^2+1\text{"} + \alpha_3\ \text{"}x^2-1\text{"})$
$= \alpha_1 \cdot \underbrace{A(\text{"}x^2+x+1\text{"})}_{\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}} + \alpha_2 \underbrace{A(\text{"}x^2+1\text{"})}_{\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}} + \alpha_3 \underbrace{A(\text{"}x^2-1\text{"})}_{\begin{bmatrix}\pi&\pi\\ \pi&2\pi\end{bmatrix}}$

$[\text{"}4x^2+3x+6\text{"}]_{\mathcal{E}} = \boxed{\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}}$

$= 3\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}\pi&\pi\\ \pi&2\pi\end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix}1-\pi & 6-\pi\\ 11-\pi & 12-2\pi\end{bmatrix}$

---

② $\mathrm{Ker}(A) = \{u \in U: A(u) = o_V\}$

$\mathcal{E}$ je báze U, tedy jakékoli $u \in U$ umíme rozepsat jako

$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha_1 \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}\pi&\pi\\ \pi&2\pi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \pi & 0 \\ 2 & 0 & \pi & 0 \\ 3 & 1 & \pi & 0 \\ 4 & 0 & 2\pi & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ v_2-2v_1 \\ v_3-3v_1 \\ v_4-4v_1 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \pi & 0 \\ 0 & 2 & -\pi & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{-2\pi} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{-2\pi} & \cancel{0} \end{array}\right] 2v_1+v_2$$

$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 2 & -\pi & 0 \end{array}\right]$ $\quad \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}-\pi\\ \pi\\ 2\end{bmatrix}} p$ $\quad \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} = A\big(p(-\pi\ \text{"}x^2+x+1\text{"} + \pi\ \text{"}x^2+1\text{"} + 2\ \text{"}x^2-1\text{"})\big)$

$= A(p\ \text{"}2x^2 - \pi x - 2\text{"}) \implies N(A) = \langle \text{"}2x^2 - \pi x - 2\text{"} \rangle$

---

④ $\mathcal{H}(A) = \left\langle \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\pi&\pi\\ \pi&2\pi\end{bmatrix} \right\rangle$

Zkusíme vyhodit (pokud existují) „nadbytečné".

$\alpha_1 \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}\pi&\pi\\ \pi&2\pi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \pi & 0 \\ 2 & 0 & \pi & 0 \\ 3 & 1 & \pi & 0 \\ 4 & 0 & 2\pi & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{GEM}} \begin{bmatrix}2 & 0 & \pi \\ 0 & 2 & -\pi\end{bmatrix}$ $\quad 2\alpha_1 + \pi\alpha_3 = 0$, $\quad 2\alpha_2 - \pi\alpha_3 = 0$

$\alpha_3 = p$
$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} p$
$\alpha_2 = -\frac{\pi}{2} p$

$\mathcal{H}(A) = \left\langle \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix} \right\rangle$

---

④ $[A]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$: $\quad U \xrightarrow{A} V$, $\quad U = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, $\quad V = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$

$[A(u)]_{\mathcal{F}} = [A]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} \cdot [u]_{\mathcal{E}}$ $\quad \leftarrow$ dosazení $e_1, e_2, \dots e_n$

$\mathbb{R}^m \qquad \mathbb{R}^{m\times n} \qquad \mathbb{R}^n$

$[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \Big[[A(e_1)]_{\mathcal{F}} \dots [A(e_n)]_{\mathcal{F}}\Big]$

$\tilde{\mathcal{E}} = (\text{"}x^2\text{"}, \text{"}x\text{"}, \text{"}1\text{"})$
$\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$

"x^2" $= 0 \cdot \text{"}x^2+x+1\text{"} + \frac{1}{2}\ \text{"}x^2+1\text{"} + \frac{1}{2}\ \text{"}x^2-1\text{"}$
"x" $= 1$ "—||—" $- 1$ "—||—" $+ 0$ "—||—"
"1" $= 0 \cdot$ "—||—" $+ \frac{1}{2}$ "—||—" $- \frac{1}{2}$ "—||—"

$A(\text{"}x^2\text{"}) = 0 \cdot \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\pi&\pi\\ \pi&2\pi\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\pi-1&\pi\\ \pi+1&2\pi\end{bmatrix}$
$A(\text{"}x\text{"}) = 1 \cdot \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix}\pi&\pi\\ \pi&2\pi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&2\\2&4\end{bmatrix}$
$A(\text{"}1\text{"}) = 0 \cdot \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\pi&\pi\\ \pi&2\pi\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\pi-1&-\pi\\ -\pi+1&-2\pi\end{bmatrix}$

$[A]_{\mathcal{F}\leftarrow\tilde{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} (\pi-1)/2 & 2 & (-\pi-1)/2 \\ \pi/2 & 2 & -\pi/2 \\ (\pi+1)/2 & 2 & (-\pi+1)/2 \\ \pi & 4 & -\pi \end{bmatrix}$

Jak se mění matice L.Z. při změně báze?

$U = \langle \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\mathcal{E}} \rangle = \langle \underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\mathcal{A}} \rangle$ $\qquad [A]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$
$V = \langle \underbrace{f_1, \dots, f_m}_{\mathcal{F}} \rangle = \langle \underbrace{b_1, \dots, b_m}_{\mathcal{B}} \rangle$ $\qquad [A]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = ?$

$[P]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{B}} [A(u)]_{\mathcal{B}}$ $\qquad [P]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{A}} [u]_{\mathcal{A}}$

$[A(u)]_{\mathcal{F}} = [A]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} \cdot [u]_{\mathcal{E}}$
$[A(u)]_{\mathcal{B}} = [A]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} \cdot [u]_{\mathcal{A}}$

$[A]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \underbrace{[P]^{-1}_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{B}}}_{[P]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{F}}} [A]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} [P]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{A}}$

$\mathcal{B} \xleftarrow{P} \mathcal{F} \xleftarrow{A} \mathcal{E} \xleftarrow{?} \mathcal{A}$

---

zpět k př ④ $\quad [A]_{\mathcal{F}\leftarrow\tilde{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} (\pi-1)/2 & 2 & (-\pi-1)/2 \\ \pi/2 & 2 & -\pi/2 \\ (\pi+1)/2 & 2 & (-\pi+1)/2 \\ \pi & 4 & -\pi \end{bmatrix}$

$[A]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \pi \\ 2 & 0 & \pi \\ 3 & 1 & \pi \\ 4 & 0 & 2\pi \end{bmatrix}$ Rovnost v sb. č. 7 / v pr. ④

STEJNÉ

$\left([P]_{\tilde{\mathcal{E}}\leftarrow\mathcal{E}}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&2&0\\1&-2&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$

$[P]_{\mathcal{E}\leftarrow\tilde{\mathcal{E}}} = \Big[[\tilde{e}_1]_{\mathcal{E}}, [\tilde{e}_2]_{\mathcal{E}}, [\tilde{e}_3]_{\mathcal{E}}\Big]$

$[P]_{\tilde{\mathcal{E}}\leftarrow\mathcal{E}} = \Big[[e_1]_{\tilde{\mathcal{E}}}, [e_2]_{\tilde{\mathcal{E}}}, [e_3]_{\tilde{\mathcal{E}}}\Big] = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$

$[A]_{\mathcal{F}\leftarrow\tilde{\mathcal{E}}} = [A]_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} [P]_{\mathcal{E}\leftarrow\tilde{\mathcal{E}}}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & \pi \\ 2 & 0 & \pi \\ 3 & 1 & \pi \\ 4 & 0 & 2\pi \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&2&0\\1&-2&1\\1&0&-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \pi-1 & 4 & -1-\pi \\ \pi & 4 & -\pi \\ \pi+1 & 4 & 1-\pi \\ 2\pi & 8 & -2\pi \end{bmatrix}$

$\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$
$\mathcal{E} = (\text{"}x^2+x+1\text{"}, \text{"}x^2+1\text{"}, \text{"}x^2-1\text{"})$
$\tilde{\mathcal{E}} = (\text{"}x^2\text{"}, \text{"}x\text{"}, \text{"}1\text{"})$