3 VEKTOROVÉ PROSTORY

- V.P. — — — — — — viz přednáška [množina + V1–V8] $(V, \oplus, \odot)$
- LINEÁRNÍ KOMBINACE
- BÁZE
- SOUŘADNICE

Příklad Dokažte, že $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \oplus, \odot)$

$ij \in \{11, 12, 21, 22\}$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = [a_{ij} + b_{ij}]$

$\alpha \odot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$

$(\forall ij \in \{11, 12, 21, 22\})$

- $\boxed{V1}$ $[a_{ij}] \oplus [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] \oplus [a_{ij}]$ (+ je komutativní)
- $\boxed{V2}$ $([a_{ij}] \oplus [b_{ij}]) \oplus [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \oplus [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$ (+ je asoc.)

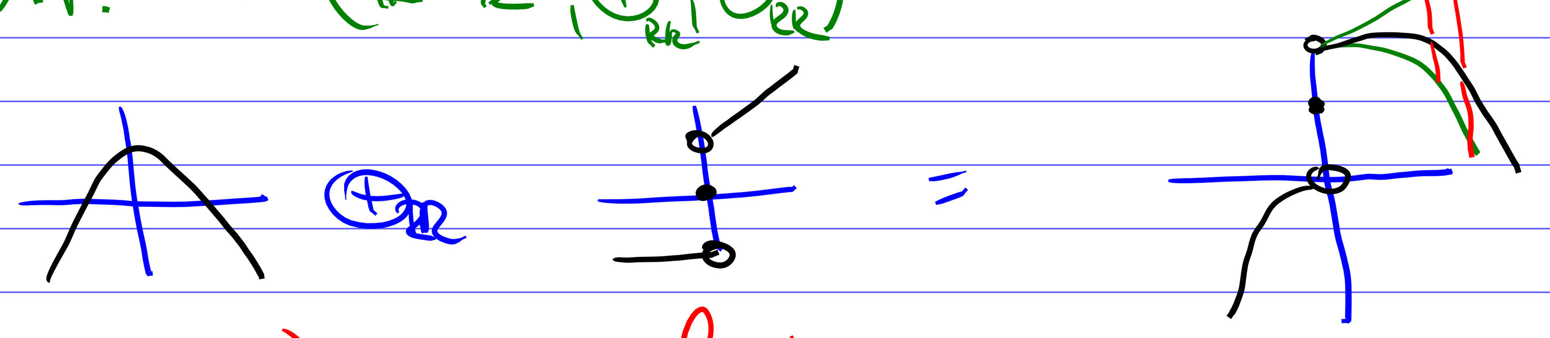
  $[a_{ij}] \oplus ([b_{ij}] \oplus [c_{ij}]) = [a_{ij}] \oplus [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$
- $\boxed{V3}$ $\underline{\underline{o}} = [o_{ij}]$ $\quad \underline{\underline{o}} \oplus \underline{\underline{a}} = [o_{ij}] \oplus [a_{ij}] = [o_{ij} + a_{ij}] = [a_{ij}]$

  $\forall ij \in \{11, 12, 13, 14\}: a_{ij} = a_{ij} + o_{ij}$

  $o_{ij} = 0$ $\square$

- V4 – V8 – DÚ

Příklady V.P. : $(\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \oplus_{\mathbb{R}\mathbb{R}}, \odot_{\mathbb{R}\mathbb{R}})$



$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \oplus_{\mathbb{R}\mathbb{R}} g)(x) = f(x) + g(x)$

- **LINEÁRNÍ KOMBINACE**

$(V, \oplus, \odot) \ni a_1, \dots, a_m, b \qquad b$ je $\dots a_1, \dots, a_m$

když $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}: \quad b = \alpha_1 \odot a_1 \oplus \dots \oplus \alpha_m \odot a_m$

Př Zjistěte, zda $\underline{a_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{a_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{a_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \to$ $\underline{b}$ je lin. kombinace $\underline{a_1}, \dots, \underline{a_3}$

$\underline{b} = \alpha_1 \underline{a_1} + \alpha_2 \underline{a_2} + \alpha_3 \underline{a_3}$

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$: $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

NAPŘ. ALE $\underline{\underline{c}} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 12 & 31 \end{bmatrix}$ JE L.K.

$\underline{\underline{c}} = 3\underline{\underline{a_1}} + 2\underline{\underline{a_2}} + 1 \cdot \underline{\underline{a_1}}$

$$
\begin{aligned}
2 &= 1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 \\
2 &= -1 \cdot \alpha_1 \quad 0 \cdot \alpha_2 \quad 2 \cdot \alpha_3 \\
2 &= 3 \cdot \alpha_1 \quad 0 \cdot \alpha_2 \quad 3 \cdot \alpha_3 \\
2 &= 7 \cdot \alpha_1 \quad 3 \cdot \alpha_2 \quad 4 \cdot \alpha_3
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ r_2 + r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 7r_1 \end{array}
\Rightarrow
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & 0 & -4 \\ 0 & -11 & -3 & -12 \end{array}\right]
\begin{array}{l} r_1 - r_2 \\ \\ r_3 + 3r_2 \\ 2r_4 + 11r_2 \end{array}
\longrightarrow
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 27 & 20 \end{array}\right]
r_4 - 3r_3
$$

$0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = -4 \quad \leftarrow \quad 0\ 0\ 0 \mid -4$

$\underline{b}$ NENÍ L.K. $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}$ $\Leftarrow$ NEEXISTUJÍ TAKOVÉ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

- **LINEÁRNÍ OBAL** $\quad \langle \underline{a_1}, \dots, \underline{a_n} \rangle = \{ \alpha_1 \odot \underline{a_1} \oplus \dots \oplus \alpha_n \odot \underline{a_n} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$

- **BÁZE V.P.**

$\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}$ je báze V.P. V

$\Updownarrow$

$\begin{cases} \underline{a_1}, \dots, \underline{a_n} \text{ jsou lineárně nezávislé} \\ \langle \underline{a_1}, \dots, \underline{a_n} \rangle = V \end{cases}$

$\underline{a_1}, \dots, \underline{a_n}$ jsou LNZ $\Leftrightarrow$

$\alpha_1 \underline{a_1} + \dots + \alpha_n \underline{a_n} = \underline{o}$ má jediné řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Př $(P_3, \oplus, \odot)$ $\qquad P_3 := \{ f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = a + bx + cx^2 \}$

$a \cdot \dots + b \cdot \dots + c \cdot \dots$

Př: Najděte souřadnice $\underline{p}$ v bázi $B = (\underline{b_1}, \underline{b_2}, \underline{b_3})$ $\subset P_3$

$\underline{b_1}(x) = 2x^2 + x$

$\underline{b_2}(x) = x + 1$

$\underline{b_3}(x) = x - 1$

$\underline{p}(x) = x^2 + x - 1$

$[p]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} : \quad \underline{p} = \alpha_1 \cdot \underline{b_1} + \alpha_2 \underline{b_2} + \alpha_3 \underline{b_3}$

$1x^2 + 1x - 1 = \alpha_1(2x^2 + x) + \alpha_2(x + 1) + \alpha_3(x - 1)$

$= (2\alpha_1)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x + (\alpha_2 - \alpha_3)$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{GEM}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & & 1 & \end{array}\right]$

$[p]_B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$