Vzorová zkouška

1. Nechť $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Nalezněte souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ v bázi $\mathcal{F}$.

   Řešení: Dle definice souřadnic vektoru, hledáme $[\mathbf{v}]_{\mathcal{F}} = [\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3]^\top \in \mathbb{R}^3$ takové, že

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \alpha_3 \mathbf{f}_3$$
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

   Vyřešíme-li uvedenou soustavu třech lineárních rovnic, dostaneme odpověď $[\mathbf{v}]_{\mathcal{F}} = [-1\,1\,1]^\top$.

2. Nechť $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Nalezněte spektrální rozklad matice A. Nejmenší čtverce.

   Řešení: Hledáme ortonormální matici U a diagonální matici D, že $\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{D}\mathsf{U}^\top$, které dostaneme z dvojic $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ vlastních čísel a odpovídajících vlastních vektorů. Spočtěme si je

$$0 = \det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$$

   $\lambda_1 = 5$: $\mathbf{0} = \mathsf{A}\mathbf{v}_1 - \lambda_1 \mathbf{v}_1 = (\mathsf{A} - \lambda_1 \mathsf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1$, což řeší například $\tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ a tedy $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   $\lambda_2 = 0$: $\mathbf{0} = \mathsf{A}\mathbf{v}_2 - \lambda_2 \mathbf{v}_2 = (\mathsf{A} - \lambda_2 \mathsf{I})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2$, což řeší například $\tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ a tedy $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{D}\mathsf{U}^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

3. „Odvození kroku CG“ - Mějme úlohu hledání minima kvadratické funkce $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathsf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b}$ se symetrickou maticí A. V každém kroku $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$ metody sdružených gradientů hledáme minimum $\mathbf{x}_{k+1}$ na přímce $\mathbf{x}_k + t\mathbf{p}_k$. Odvoďte vzorec pro $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

   Řešení: Máme zadanou matici A a vektory $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{p}_k$. Hledáme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) &= \min_{t \in \mathbb{R}} f(\mathbf{x}_k + t\mathbf{p}_k) = \min_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k + t\mathbf{p}_k)^\top \mathsf{A}(\mathbf{x}_k + t\mathbf{p}_k) - (\mathbf{x}_k + t\mathbf{p}_k)^\top \mathbf{b} \\ &= \mathbf{x}_k^\top \mathsf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^\top \mathbf{b} + \min_{t \in \mathbb{R}} \frac{t^2}{2} \mathbf{p}_k^\top \mathsf{A}\mathbf{p}_k + t(\mathbf{p}_k^\top \mathsf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^\top \mathbf{b}) \end{aligned}$$

   Funkce $g(t) = at^2 + bt$ nabývá minima pro $g'(t) = 2at + b = 0$, tedy $t = -\frac{b}{2a}$, což v našem případě znamená $t = \frac{\mathbf{p}_k^\top(\mathbf{b} - \mathsf{A}\mathbf{x}_k)}{\mathbf{p}_k^\top \mathsf{A}\mathbf{p}_k}$.

4. Nechť $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. Určete matici Householderovy transformace H tak, aby HM měla nuly v prvním sloupci pod hlavní diagonálou, $\mathsf{HM} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$.

Řešení: Chceme nalézt matici $\mathsf{H} = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^\top$ takovou, aby $\mathsf{H}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \| \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathsf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

A skutečně, $\mathsf{HM} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & 13 & 21 \\ 0 & -11 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Nechť $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Spočítejte délku příčky mimoběžek AB a CD.

Řešení: Pro kvadrát délky příčky přímek

$$AB \equiv p \ni X(t) = A + t(B - A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CD \equiv q \ni Y(s) = C + t(D - C) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

platí

$$\begin{aligned} d^2(p,q) &= \min_{t,s\in\mathbb{R}} \|X(t) - Y(s)\|^2 \\ &= \min_{t,s\in\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\top \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \min_{t,s\in\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\top \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= 9 + \min_{t,s\in\mathbb{R}} \begin{bmatrix} t & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Protože je matice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ pozitivně definitní, je ve stacionárním bodě, který spočteme

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = grad \left(\begin{bmatrix} t & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} \right) = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

a tedy

$$d = \sqrt{9 + \frac{1}{11}\begin{bmatrix}-5 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix}\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-5\\ 10\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0 & 5\end{bmatrix}\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-5\\ 10\end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{49}{11}}.$$

Témata k ústní zkoušce

- Vektorové prostory, báze, souřadnice, lineární zobrazení, skalární součin, ortonormalita
- Fourierova transformace, FFT
- Spektrální rozklad
- Singulární rozklad, standardní vs redukovaná verze, aproximace matice
- Householderovy a Givensovy transformace
- Metoda sdružených gradientů, gradient
- Analytická geometrie
- SVN (Support Vector Machines)