

Aplikovaná Algebra (cvičení)

Oldřich Vlach, Zdeněk Dostál

14. května 2018

1 Připomenutí některých kapitol z diferenciálního počtu funkce více proměnných a z lineární algebry

1.1 Funkce více proměnných

V tomto kurzu budeme navazovat na pojmy z kalkulu funkcí více proměnných [1].

Příklad 1. Necht

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 < 1 \right\} \cup \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}, 3 - \frac{2}{k} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Určete int M , ext M , \overline{M} , ∂M a množinu všech hromadných bodů množiny M .

Řešení.

□

Příklad 2. Znázorněte graf funkce f definované předpisem

a) $f(x) = 1 - |x| - |y|$

b) $f(x) = x^2 + y^2 - 1$

c) $f(x) = x^2 - 1$

1.2 Komplexní čísla a exponenciální funkce

1.2.1 Komplexní čísla

Množinu komplexních čísel označíme

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$$

a definujeme na ní operace (viz [4])

$$\text{sčítání } (a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$$

$$\text{odčítání } (a + bi) - (c + di) = (a - b) + (c - d)i$$

$$\text{násobení } (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$c + di \neq 0 + 0i : \quad \text{dělení } \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i$$

Příklad 3. Pro komplexní číslo $z = a + bi \neq 0 + 0i$ určete jeho inverzi vzhledem k násobení.

Řešení. Hledáme komplexní číslo $w = c + di$ takové, aby $(a + bi)(c + di) = 1 + 0i$. Protože

$$1 + 0i = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Což nám určuje soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$$

$$\text{Tedy } w = z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \quad \square$$

1.2.2 Exponenciální funkce

Exponenciální funkce je v matematice nejdůležitější [2]. Je definována jako

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (1)$$

Zkusme upravit

$$\begin{aligned} \exp(a)\exp(b) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^l}{l!} = \begin{pmatrix} \frac{a^0}{0!} \\ + \frac{a^1}{1!} \\ + \frac{a^2}{2!} \\ + \frac{a^3}{3!} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{b^0}{0!} + \frac{b^1}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \begin{matrix} \frac{a^0}{0!} \frac{b^0}{0!} & + \frac{a^0}{0!} \frac{b^1}{1!} & + \frac{a^0}{0!} \frac{b^2}{2!} & + \frac{a^0}{0!} \frac{b^3}{3!} & + \dots \\ + \frac{a^1}{1!} \frac{b^0}{0!} & + \frac{a^1}{1!} \frac{b^1}{1!} & + \frac{a^1}{1!} \frac{b^2}{2!} & + \frac{a^1}{1!} \frac{b^3}{3!} & + \dots \\ + \frac{a^2}{2!} \frac{b^0}{0!} & + \frac{a^2}{2!} \frac{b^1}{1!} & + \frac{a^2}{2!} \frac{b^2}{2!} & + \frac{a^2}{2!} \frac{b^3}{3!} & + \dots \\ + \frac{a^3}{3!} \frac{b^0}{0!} & + \frac{a^3}{3!} \frac{b^1}{1!} & + \frac{a^3}{3!} \frac{b^2}{2!} & + \frac{a^3}{3!} \frac{b^3}{3!} & + \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{a^m}{m!} \frac{b^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} a^m b^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b) \quad (2) \end{aligned}$$

Definujme číslo e jako $\exp(1)$ a poznamenejme, že dle (1) je $e^0 = 1$. Dokažme, že

- $(\forall z \in \mathbb{C}) : e^z \neq 0 \in \mathbb{C}$

$$1 = e^0 = e^{z-z} \stackrel{(2)}{=} e^z e^{-z} \quad \square$$

- $\exp'(z) = \exp(z)$

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} \stackrel{(2)}{=} \exp(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &\stackrel{(1)}{=} \exp(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1}{h} = \exp(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!}}{h} = \exp(z) \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} = \exp(z) \quad \square \end{aligned}$$

- Restrikce $\exp(z)$ na reálnou osu je kladná rostoucí funkce, pro níž platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

$$\text{kladná : } \exp(x) \stackrel{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) : x^n > 0$$

$$\text{rostoucí na } \mathbb{R}_+ : (\forall x \in \mathbb{R}_+) (\forall n \in \mathbb{N}) (x_1 < x_2) \Rightarrow (x_1^n < x_2^n) \Rightarrow \exp(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_2^n}{n!} = \exp(x_2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2!} = \infty, \quad \frac{x^2}{2!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

$$\text{zbytek : } \text{plyne } z = \exp(x)\exp(-x) \stackrel{(2)}{=} \exp(x-x) = 1 \quad \square$$

- Restrikce $\exp(z)$ na imaginární osu ($z = it, t \in \mathbb{R}$) má absolutní hodnotu rovnu jedné (leží na jednotkové kružnici), a $\exp(-it) = \overline{\exp(it)}$

$$\begin{aligned} \exp(-it) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} = 1 - i\frac{t}{1!} - \frac{t^2}{2!} + i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - i\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} + i\frac{t^7}{7!} + \dots \\ \exp(it) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = 1 + i\frac{t}{1!} - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - i\frac{t^7}{7!} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

tedy $\exp(-it) = \overline{\exp(it)}$. Pro kvadrát absolutní hodnoty platí

$$|\exp(it)|^2 = \exp(it)\overline{\exp(it)} = \exp(it)\exp(-it) \stackrel{(2)}{=} \exp(it-it) = \exp(0) = 1 \quad \square$$

Definujme pro $t \in \mathbb{R}$ funkce \cos a \sin jako reálnou a imaginární složku funkce

$$\exp(it) = \text{Re}(\exp(it)) + i\text{Im}(\exp(it)) = \cos(t) + i\sin(t).$$

Podíváme-li se pozorněji na rozvoj (3) dostáváme

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \\ \sin(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Následujícím derivováním

$$\cos'(t) + i \sin'(t) = (\cos(t) + i \sin(t))' = (e^{it})' = ie^{it} = i \cos(t) + i^2 \sin(t) = -\sin(t) + i \cos(t)$$

dostáváme

$$\cos'(t) = -\sin(t)$$

$$\sin'(t) = \cos(t)$$

1.3 Vektorové prostory

Čtveřici $(\mathcal{V}, F, \oplus, \odot)$, kde \mathcal{V} je množina, F je těleso [lépe řečeno $(F, +, \cdot)$ je těleso] a \oplus, \odot jsou operace $\oplus : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$, $\odot : F \times \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ nazveme pojmem vektorový prostor, právě tehdy když: (\mathcal{V}, \oplus) je komutativní grupa [vlastnosti (4)–(7)] a jsou splněny vlastnosti (8)–(11). Tedy přehledně

$$\begin{array}{ll}
 \text{Asociativita: } (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}) : & (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) \quad (4) \\
 \text{Nulový prvek: } (\exists \mathbf{o} \in \mathcal{V})(\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}) : & \mathbf{u} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{o} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (5) \\
 \text{Opačný prvek: } (\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V})(\exists(-\mathbf{u}) \in \mathcal{V}) : & \mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = \mathbf{o} \quad (6) \\
 \text{Komutativita: } (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}) : & \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u} \quad (7) \\
 \text{Distributivita k } \oplus : (\forall \alpha \in F)(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}) : & \alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{v}) \quad (8) \\
 \text{Distributivita k } + : (\forall \alpha, \beta \in F)(\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}) : & (\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\beta \odot \mathbf{u}) \quad (9) \\
 \text{Kompatibilita } \odot \text{ a } \cdot : (\forall \alpha, \beta \in F)(\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}) : & \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u} \quad (10) \\
 \text{Násobení jedničkou } F : (\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}) : & 1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (11)
 \end{array}$$

kde $1 \in F$ je v tělese F identitou vzhledem k násobení, tedy $(\forall \alpha \in F): 1 \cdot \alpha = \alpha$.

Mějme podmnožinu $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ a restrikce $\oplus|_{\mathcal{W}}, \odot|_{\mathcal{W}}$ operací \oplus, \odot na \mathcal{W} . Pokud je $(\mathcal{W}, F, \oplus|_{\mathcal{W}}, \odot|_{\mathcal{W}})$ vektorovým prostorem, nazýváme ji pojmem podprostor vektorového prostoru \mathcal{V} . Postačující podmínkou, aby \mathcal{W} byl podprostorem vektorového prostoru \mathcal{V} je uzavřenost operací na \mathcal{W}

$$\begin{array}{l}
 (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{W}) : \mathbf{u} \oplus|_{\mathcal{W}} \mathbf{v} \in \mathcal{W} \\
 (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{W}) : \alpha \odot|_{\mathcal{W}} \mathbf{v} \in \mathcal{W}.
 \end{array}$$

Příklad 4. Dokažte (7) a (8) pro

a) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathbb{R}, \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}, \odot_{\mathbb{R}^{2 \times 2}})$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ d+g & c+h \end{bmatrix} \\ \alpha \odot_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha d & \alpha c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) $(P_3, \mathbb{R}, \oplus_{P_3}, \odot_{P_3})$

$$\begin{aligned} (a + bx + cx^2) \oplus_{P_3} (d + ex + fx^2) &= (a + d) + (b + e)x + (c + f)x^2 \\ \alpha \odot_{P_3} (a + bx + cx^2) &= (\alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2) \end{aligned}$$

Řešení.

a) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2 \times 2})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbf{v} \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \mathbf{u} \\ \alpha \odot_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} (\mathbf{u} \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \mathbf{v}) &= \alpha \odot_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) = \alpha \odot_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(a+e) & \alpha(b+f) \\ \alpha(c+g) & \alpha(d+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \alpha e & \alpha b + \alpha f \\ \alpha c + \alpha g & \alpha d + \alpha h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{bmatrix} \alpha e & \alpha f \\ \alpha g & \alpha h \end{bmatrix} = \\ &= \left(\alpha \odot_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \left(\alpha \odot_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) = (\alpha \odot_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \mathbf{u}) \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} (\alpha \odot_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \mathbf{v}) \end{aligned}$$

b) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in P_3)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (a + bx + cx^2), \quad \mathbf{v} = (d + ex + fx^2) \\ \mathbf{u} \oplus_{P_3} \mathbf{v} &= (a + bx + cx^2) \oplus_{P_3} (d + ex + fx^2) = (a + d) + (b + e)x + (c + f)x^2 = \\ &= (d + a) + (e + b)x + (f + c)x^2 = (d + ex + fx^2) \oplus_{P_3} (a + bx + cx^2) = \mathbf{v} \oplus_{P_3} \mathbf{u} \\ \alpha \odot_{P_3} (\mathbf{u} \oplus_{P_3} \mathbf{v}) &= \alpha \odot_{P_3} ((a + bx + cx^2) \oplus_{P_3} (d + ex + fx^2)) = \\ &= \alpha \odot_{P_3} ((a + d) + (b + e)x + (c + f)x^2) = \\ &= \alpha(a + d) + \alpha(b + e)x + \alpha(c + f)x^2 = (\alpha a + \alpha d) + (\alpha b + \alpha e)x + (\alpha c + \alpha f)x^2 = \\ &= (\alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2) + (\alpha d + \alpha ex + \alpha fx^2) = \\ &= (\alpha \odot_{P_3} (a + bx + cx^2)) \oplus_{P_3} (\alpha \odot_{P_3} (d + ex + fx^2)) = (\alpha \odot_{P_3} \mathbf{u}) \oplus_{P_3} (\alpha \odot_{P_3} \mathbf{v}) \end{aligned}$$

□

Příklad 5. Mějme vektorový prostor $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}, \oplus_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}, \odot_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}})$ všech reálných funkcí, kde

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \\ (\forall f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : & (f \oplus_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : & (\alpha \odot_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} f)(x) = \alpha f(x). \end{aligned}$$

Určete (a své tvrzení obhajte), které z množin $\# \in \{\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}\} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) < \infty\} \\ \mathcal{V} &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid (\forall x \in \mathbb{R}) : f(2016) = 1\} \\ \mathcal{W} &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid (\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = c \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

spolu s restrikcí operací z $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ na $\#$ tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Řešení. Je potřeba prokázat uzavřenost operací sčítání vektorů a násobení skalárem.

a) $(\mathcal{U} = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, \oplus_{|\mathcal{U}}, \odot_{|\mathcal{U}})$ je podprostor vektorového prostoru $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}, \oplus_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}, \odot_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}})$ jelikož

$$\begin{aligned} f, g \in \mathcal{U} &\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : (f \oplus_{|\mathcal{U}} g)'(x) = f'(x) + g'(x) < \infty \Rightarrow f \oplus_{|\mathcal{U}} g \in \mathcal{U} \\ \alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{U} &\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : (\alpha \odot_{|\mathcal{U}} f)'(x) = \alpha f'(x) < \infty \Rightarrow \alpha \odot_{|\mathcal{U}} f \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

b) $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, \oplus_{|\mathcal{V}}, \odot_{|\mathcal{V}})$ není vektorový prostor, jelikož například dokonce $(\forall f, g \in \mathcal{V}) :$

$$(f \oplus_{|\mathcal{V}} g)(2016) = f(2016) + g(2016) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow f \oplus_{|\mathcal{V}} g \notin \mathcal{V}.$$

Podobně není uzavřené například násobení skalárem $\alpha \neq 1$. Všimněme si, že nulová funkce $\mathbf{0}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} \equiv 0$ z axiomu 5 vektorového prostoru $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ není prvkem \mathcal{V} . Podprostor vektorového prostoru vždy musí obsahovat nulový prvek původního prostoru.

c) $(\mathcal{W}, \mathbb{R}, \oplus_{|\mathcal{W}}, \odot_{|\mathcal{W}})$ není vektorový prostor, jelikož pro například pro $\alpha = \frac{1}{2}, f \equiv 1$ je

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : (\alpha \odot_{|\mathcal{W}} f)(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha \odot_{|\mathcal{W}} f \equiv \frac{1}{2} \notin \mathcal{W}.$$

Všimněme si, že operace $\oplus_{|\mathcal{W}}$ uzavřená je

$$(\forall f, g \in \mathcal{W}) : (\forall x \in \mathbb{R}) : (f \oplus_{|\mathcal{W}} g)(x) = f(x) + g(x) = c_f + c_g = c_{f \oplus_{|\mathcal{W}} g} \in \mathbb{Z}, \text{ tedy } f \oplus_{|\mathcal{W}} g \in \mathcal{W}.$$

□

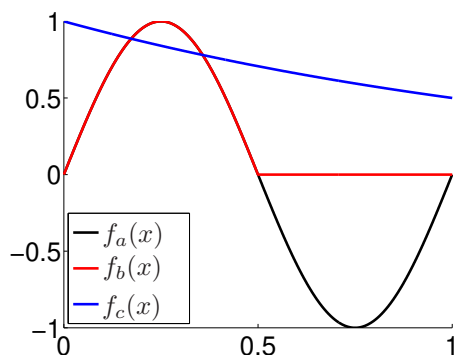
1.4 Báze

Uspořádanou množinu $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$, vektorů vektorového prostoru \mathcal{V} nezmene pojmem báze vektorového prostoru \mathcal{V} , jestliže je lineárně nezávislá a její lineární obal je celý prostor \mathcal{V} , tedy $\langle \mathcal{F} \rangle = \mathcal{V}$. Souřadnice $[\mathbf{u}]_{\mathcal{F}}$ vektoru $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ vzhledem k bázi \mathcal{F} vektorového prostoru \mathcal{V} je vektor koeficientů lineární kombinace $\mathbb{R}^n \ni [\mathbf{u}]_{\mathcal{F}} : \mathbf{u} = ([\mathbf{u}]_{\mathcal{F}})_1 \mathbf{f}_1 + \dots + ([\mathbf{u}]_{\mathcal{F}})_n \mathbf{f}_n$.

Příklad 6. Mějme několik reálných spojitých funkcí $f_{\#} \in C(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R})$, $\# \in \{a, b, c\}$, zadaných předpisem

$$f_a(x) = \sin(2\pi x), \quad f_b(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 0 & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}, \quad f_c(x) = 2^{-x}$$

a zobrazených na Obrázku 1. Chceme tyto funkce reprezentovat na počítači, což nelze udělat pro obecně



Obrázek 1: Funkce z Příkladu 6.

funkce přesně, jelikož prostor $C(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R})$ má nekonečnou dimenzi. Zkusme to nepřesně. Interval $(0, 1)$ rozdělíme na 2^n dílků (proč, to uvidíme později) a dostaneme rovnoměrně navzorkování intervalu $(0, 1)$ body x_j , $j \in \{1, \dots, 2^n + 1\}$,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2^{-n}, \dots, \quad x_j = (j-1) \cdot 2^{-n}, \dots, \quad x_{2^n+1} = 1.$$

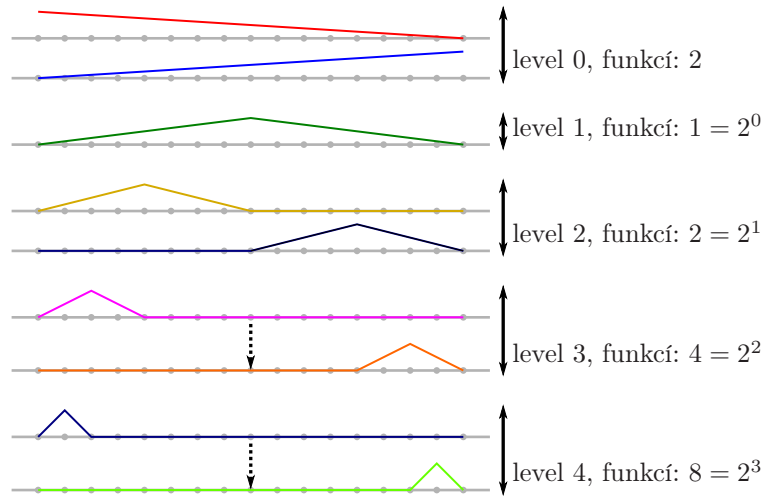
Hodnoty zadaných funkcí v těchto bodech označíme $f_{\#,j}$. Funkce $f_{\#}$ nahradíme funkcemi $\tilde{f}_{\#} \in \mathcal{V} \subset C(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R})$, kde funkce z prostoru \mathcal{V} jsou po částech lineární na intervalech

$$I_j = \langle x_j, x_{j+1} \rangle, \quad j \in \{1, \dots, 2^n\} \quad \text{a} \quad f_{\#}(x_k) = \tilde{f}_{\#}(x_k), \quad k \in \{1, \dots, 2^n + 1\}, \quad \# \in \{a, b, c\}.$$

a) Určete v jaké bázi \mathcal{S} prostoru \mathcal{V} jsou platí pro souřadnice

$$[\tilde{f}_{\#}]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{\#}(x_1) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\#}(x_{2^n+1}) \end{bmatrix}.$$

b) Rekurzivně definujme jinou bázi \mathcal{E} , viz obrázek 2. Určete souřadnice funkcí $\tilde{f}_{\#}$ v této nové bázi a proveďte tzv. prahování, kdy všechny souřadnice menší než $\varepsilon = 10^{-2}$ zanedbejte.



Obrázek 2: Hierarchická báze na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, první čtyři úrovně.

Listing 1: generate_1d_hierarchical_basis.m

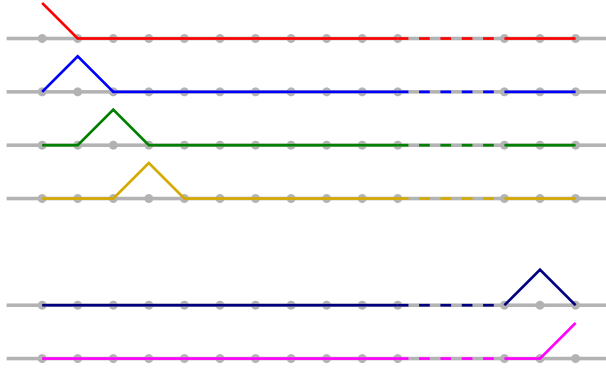
```

1 function B = generate_1d_hierarchical_basis(n)
2 % generates the hierarchical basis on interval (0,1) of order n
3 % the basis is returned in columns of B that contains
4 % "dofs" functions b_{1} ... b_{dofs}
5 % each function is given by values in points x
6 dofs = 1+2^n; % B contains "dofs" functions
7 x = (0:dofs-1)/(dofs-1); %
8 B = zeros(dofs);
9 B(:,1) = x;
10 B(:,2) = 1-x;
11 count = 3;
12 for i = 1:n
13 % for remaining levels
14 xa = 0 : 2^(n-i+1) : 2^n - 2^(n-i+1);
15 xb = 2^(n-i+1) : 2^(n-i+1) : 2^n;
16 xc = 0.5*(xa+xb);
17 for j = 1:size(xa,2);
18 B(xa(j)+1:xc(j)+1, count) = (0:xc(j)-xa(j))/(xc(j)-xa(j));
19 B(xc(j)+1:xb(j)+1, count) = 1-(0:xb(j)-xc(j))/(xb(j)-xc(j));
20 count = count+1;
21 end
22 end

```

Řešení. Zdrojové kódy k tomuto příkladu jsou uvedeny v 1 a 2.

- Báze \mathcal{S} je zobrazena na obrázku 3. Jedná se o po částech lineární spojitě funkce φ_j , které mají ve vzorkovacím bodě x_j hodnotu 1, a v ostatních vzorkovacích bodech hodnotu 0. Je zřejmé, že souřadnice v této bázi jsou přímo funkční hodnoty $f_{\#}(x_k)$ a lze je tak ztotožnit s grafy funkcí na Obrázku 1.
- Řešení tohoto úkolu je uvedeno ve zdrojovém kódu 2. Nejdříve se spustí generování hodnot báze funkcí $\psi_j(x_i)$ ve vzorkovacích bodech a uloží se do matice $B \in \mathbb{R}^{(2^n+1) \times (2^n+1)}$, tedy



Obrázek 3: Standardní báze na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

$[B]_{i,j} = \psi_j(x_i)$. Funkční hodnoty zadaných funkcí ve vzorkovacích bodech uložíme do matice $Y \in \mathbb{R}^{(2^n+1) \times 3}$, podrobněji $[C]_{i,j} = \tilde{f}_j(x_i)$.

Potom spočítáme souřadnice v bázi $\mathcal{E} = (\psi_1, \dots, \psi_{2^n+1})$, které uložíme po sloupcích do matice $C \in \mathbb{R}^{(2^n+1) \times (2^n+1)}$

$$[\tilde{f}_a]_{\mathcal{E}} = [C]_{:,1}, [f_b]_{\mathcal{E}} = [C]_{:,2}, [f_c]_{\mathcal{E}} = [C]_{:,3}.$$

Například pro první sloupec matice C pak musí platit

$$\tilde{f}_a = \sum_{i=1}^{2^n+1} [C]_{i,1} \psi_i \Rightarrow [Y]_{:,1} = \sum_{i=1}^{2^n+1} [C]_{i,1} [B]_{:,i} = \sum_{k=1}^{2^n+1} [B]_{:,k} [C]_{k,1} = B \cdot [C]_{:,1},$$

a analogicky to bude pro ostatní sloupce matice C . Tedy $Y = BC$, $C = B^{-1}Y$. Podotkněme, že pro výpočet matice C není nutné (a ani vhodné, proč?) spočítat matici B^{-1} . Absolutní hodnoty získaných souřadnic jsou zobrazeny na Obrázku 4. Všimneme si, že podstatná většina z nich je velmi malá. Co se stane, když všechny menší než ε znulujeme? Zkopírujeme matici C do matice D a následně v D provedeme prahování hodnot na ε . Tímto procesem

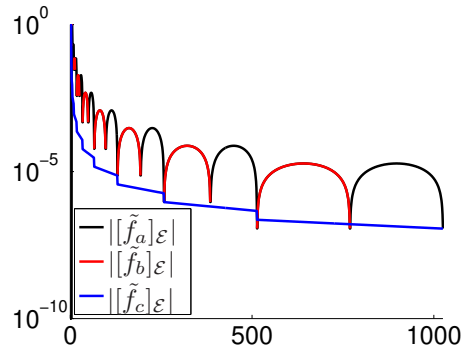
$$\hat{f}_a = \sum_{i=1}^{2^n+1} [D]_{i,1} \psi_i$$

(a analogicky) obdržíme funkce $\hat{f}_{\#}$, které jsou zobrazeny na Obrázku 5 (vlevo) a rozdíly (chyba, kterou se dopouštíme prahováním souřadnic) $f_{\#} - \hat{f}_{\#}$ je zobrazena na Obrázku 5 (vpravo). Ještě uvedeme, jak se prahování projeví na počtu nenulových koeficientů, což je uvedeno v Tabulce 1.

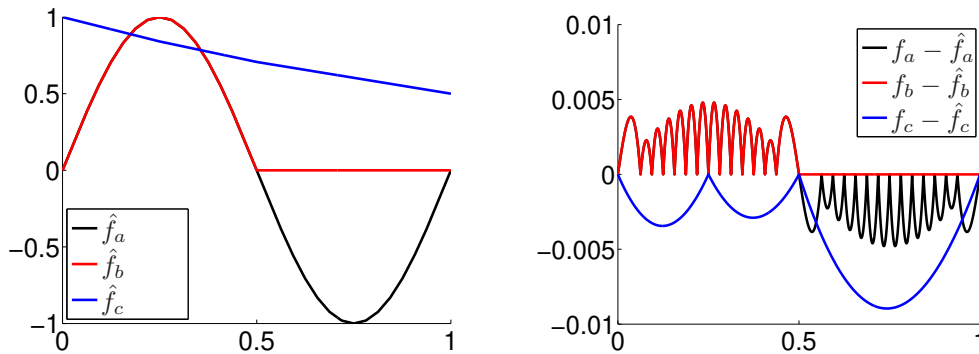
#	a	b	c
$f_{\#}$	1024	511	1025
$\hat{f}_{\#}$	26	13	4

Tabulka 1: Počty nenulových koeficientů po prahování, Příklad 6.

□



Obrázek 4: Absolutní hodnoty souřadnic v hierarchické bázi, Příklad 6.



Obrázek 5: Funkce po prahování souřadnic, Příklad 6.

Listing 2: hierarchical_basis_test.m

```

1  n = 10; % level
2  B = generate_1d_hierarchical_basis(n); % hierarchical basis
3  m = size(B,1); z=1:m; % dofs
4  x = (0:m-1)/(m-1); % interval (0,1)
5  e = 1e-2; % epsilon
6  f = @(x) [... % test functions
7      sin(2*pi*x);...
8      sin(2*pi*x).*(x<0.5);...
9      2.^(-x)
10 ];
11 Y = f(x)';
12 plot(x, Y(:,1), '-k'); plot(x, Y(:,2), '-r'); plot(x, Y(:,3), '-b');
13 C = B\Y;
14 plot(x, B*C(:,1), '-k'); plot(x, B*C(:,2), '-r'); plot(x, B*C(:,3), '-b');
15 figure(3); hold on;
16 plot(z, C(:,1), '-k'); plot(z, C(:,2), '-r'); plot(z, C(:,3), '-b');
17 figure(4); hold on;
18 plot(z, abs(C(:,1)), '-k'); plot(z, abs(C(:,2)), '-r'); plot(z, abs(C(:,3)), '-b');
19 set(gca, 'YScale', 'log');
20 D = C; D(abs(D)<e) = 0; figure(5); hold on;
21 plot(x, B*D(:,1), '-k'); plot(x, B*D(:,2), '-r'); plot(x, B*D(:,3), '-b');
22 fprintf(1, ['Nonzero valued coordinates (hierarchical); ', ...
23 'f1: %4i, f2: %4i, f3: %4i\n'], nnz(C(:,1)), nnz(C(:,2)), nnz(C(:,3)));
24 fprintf(1, ['Nonzero valued coordinates (threshold h.); ', ...
25 'f1: %4i, f2: %4i, f3: %4i\n'], nnz(D(:,1)), nnz(D(:,2)), nnz(D(:,3)));

```

1.5 Lineární zobrazení

Zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ nazveme lineární (zapisujeme $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$) právě tehdy, když

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}) : \quad A(\mathbf{u}) \oplus_{\mathcal{V}} A(\mathbf{v}) = A(\mathbf{u} \oplus_{\mathcal{U}} \mathbf{v}) \quad (12)$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}) : \quad \alpha \odot_{\mathcal{V}} A(\mathbf{u}) = A(\alpha \odot_{\mathcal{U}} \mathbf{u}). \quad (13)$$

Nechť vektorové prostory \mathcal{U} a \mathcal{V} mají báze $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$. Matice lineárního zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ vzhledem k bázím \mathcal{E} a \mathcal{F} je matice

$$\mathbb{R}^{n \times m} \ni A_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} \stackrel{\text{ozn.}}{=} A_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} = [[A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}} \quad \dots \quad [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}}].$$

Platí pro ni $[A(\mathbf{u})]_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}$. Připomínáme, že v tomto textu budeme označovat matici přechodu $A_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}$ místo obvyklého $A_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$.

Příklad 7. Mějme n bodů v \mathbb{R}^3 (například souřadnice bodů nějakého STL modelu). Jak se změní tyto souřadnice při rotaci postupně o úhly $(\alpha, \beta, \gamma) = (10^\circ, 15^\circ, 20^\circ)$ vzhledem k osám (x, y, z) ?

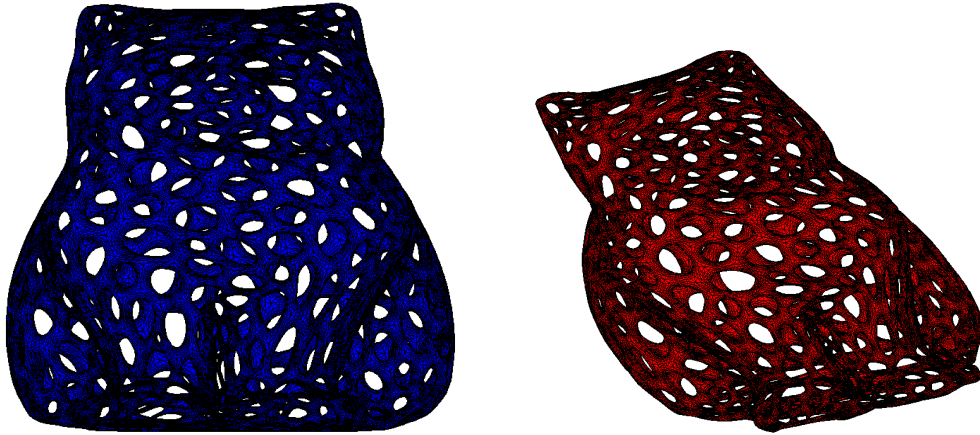
Řešení. Výslednou rotaci $R_{\alpha, \beta, \gamma} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dostaneme postupnou rotací (zobrazení $R_{x, \alpha}, R_{y, \beta}, R_{z, \gamma} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$) podél jednotlivých os, tedy $R_{\alpha, \beta, \gamma} = R_{x, \alpha} \circ R_{y, \beta} \circ R_{z, \gamma}$, kde

$$[R_{x, \alpha}]_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad [R_{y, \beta}]_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}, \quad [R_{z, \gamma}]_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdrojové kódy k tomuto příkladu jsou uvedeny v Kódech 3 a 4. Jako příklad použití si načteme ASCII STL soubor, obsahující povrchovou síť modelu kočky, funkcí `read_stl`, která vrací body P (matice $n_p \times 3$). Povrchovou síť zobrazíme pomocí funkce `patch`, viz Obrázek 6 (vlevo). Rotované souřadnice P_r získáme pomocí matice R , což je vlastně matice lineární transformace $R_{\alpha, \beta, \gamma} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ vzhledem ke standardní bázi \mathcal{S} , to jest $R = [R_{\alpha, \beta, \gamma}]_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}$. Proto

$$P_r^T = RP^T \Rightarrow P_r = PR^T.$$

Na Obrázku 6 vpravo je zobrazena povrchová síť po rotaci.



Obrázek 6: Data z STL souboru vlevo originální, vpravo po rotaci, Příklad 7.

□

Listing 3: read_stl.m

```

1 function [p,e,n] = read_stl(filename)
2 % reads STL ascii file
3 % outs: p ... points
4 %       e ... triangles
5 %       n ... outer normals to triangles
6 fid = fopen(filename,'r');
7 if fid
8     % read stl file
9     textscan(fid,'%s',1,'delimiter','\n');
10    ts=textscan(fid,['facet normal %f %f %f\n','outer loop\n',...
11    'vertex%f %f %f\n','vertex%f %f %f\n','vertex%f %f %f\n',...
12    'endloop\n','endfacet']);
13    n = [ts{ 1} ts{ 2} ts{ 3}];
14    p = [ts{ 4} ts{ 5} ts{ 6}; ts{ 7} ts{ 8} ts{ 9}; ts{10} ts{11} ts{12}];
15    m = size(n, 1);
16    e = [1:m; m+1:2*m; 2*m+1:3*m];
17 end

```

Listing 4: rotation_test.m

```

1 [p,e,n] = read_stl('../data_files/Mesh.stl');
2 al = 10*pi/180;
3 be = 15*pi/180;
4 ga = 20*pi/180;
5 R2d = @(xx) [cos(xx) -sin(xx); sin(xx) cos(xx)];
6 Rx = eye(3); Rx([2 3],[2 3]) = R2d(al);
7 Ry = eye(3); Ry([1 3],[1 3]) = R2d(be)';
8 Rz = eye(3); Rz([1 2],[1 2]) = R2d(ga);
9 Rt = eye(3); Rt([2 3],[2 3]) = R2d(90*pi/180);
10 R = Rx*Ry*Rz; p = p*Rt;
11 pr = p*R';
12 figure(1); patch('Faces',e,'Vertices',p,'FaceColor','b');
13 figure(2); patch('Faces',e,'Vertices',pr,'FaceColor','r');

```

Důležitou lineární transformací je změna souřadnic při změně báze. Mějme dvě báze \mathcal{E} , \mathcal{F} vektorového prostoru \mathcal{V} . Pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ umíme určit souřadnice $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{F}}$ v těchto bázích. Ukažme, že zobrazení $P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}$ přiřazující souřadnicím v bázi \mathcal{E} příslušné souřadnice v bázi \mathcal{F} je lineární, tj. $P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $n = \dim \mathcal{V}$, navíc umíme spočít matici tohoto lineárního zobrazení $P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pomocí které pak snadno převádíme souřadnice

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}, \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{F}} \Rightarrow P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}^{-1} = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F}}. \quad (14)$$

Skutečně pro souřadnice platí

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{v}]_{\mathcal{F},i} \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^n [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},i} \mathbf{e}_i.$$

Tuto rovnost mezi vektory ve \mathcal{V} vyjádříme v souřadnicích některé z bází, například \mathcal{F} (vektory \mathbf{s}_i jsou vektory standardní báze prostoru \mathbb{R}^n) a

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{v}]_{\mathcal{F},i} \overbrace{[\mathbf{f}_i]_{\mathcal{F}}}^{\mathbf{s}_i} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},i} [\mathbf{e}_i]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{F}} & \dots & [\mathbf{e}_n]_{\mathcal{F}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},1} \\ \vdots \\ [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},n} \end{bmatrix} = P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}.$$

Dostali jsme vztah pro tzv. matici přechodu od souřadnic v bázi \mathcal{E} k souřadnicím v bázi \mathcal{F}

$$P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{F}} & \dots & [\mathbf{e}_n]_{\mathcal{F}} \end{bmatrix}.$$

Příklad 8. Mějme vektorový prostor $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathbb{R}, \oplus_{\mathbb{R}^{2 \times 2}}, \odot_{\mathbb{R}^{2 \times 2}})$, báze \mathcal{E} , \mathcal{F} , dále lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ a bilineární formu $B : \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ \mathcal{F} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ A(\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} [\mathbf{u}]_{1,1} & [\mathbf{u}]_{1,2} & [\mathbf{u}]_{1,2} & [\mathbf{u}]_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{v}]_{1,1} \\ [\mathbf{v}]_{1,2} \\ [\mathbf{v}]_{2,1} \\ [\mathbf{v}]_{2,2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Určete

- matici přechodu $P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}$ od souřadnic v bázi \mathcal{E} k souřadnicím v bázi \mathcal{F} ,
- matici $A_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}$ lineárního zobrazení A vzhledem k bázím \mathcal{E} a \mathcal{F} ,
- matici $B_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$ bilineární formy B vzhledem k bázím \mathcal{E} a \mathcal{F} .

Řešení. □

- Uvedeme si dva způsoby, jak $P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}$ spočítat.

- přímo ze vzorce $P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} = [[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{F}} \ \dots \ [\mathbf{e}_4]_{\mathcal{F}}]$, kde pro zkrácení zápisu píšeme $[\mathbf{e}_i]_{\mathcal{F}, j} = p_{j,i}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i &= p_{1,i} \mathbf{f}_1 + p_{2,i} \mathbf{f}_2 + p_{3,i} \mathbf{f}_3 + p_{4,i} \mathbf{f}_4 \quad i = 1, \dots, 4 \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= p_{1,1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + p_{2,1} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + p_{3,1} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + p_{4,1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} &= p_{1,4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + p_{2,4} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + p_{3,4} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + p_{4,4} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tyto čtyři rovnosti mezi $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ maticemi jsou ekvivalentní s rovnostmi

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= p_{1,1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + p_{2,1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + p_{3,1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + p_{4,1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \\ p_{3,1} \\ p_{4,1} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= p_{1,4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + p_{2,4} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + p_{3,4} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + p_{4,4} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,4} \\ p_{2,4} \\ p_{3,4} \\ p_{4,4} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

což lze zapsat dohromady jako

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & p_{3,4} \\ p_{4,1} & p_{4,2} & p_{4,3} & p_{4,4} \end{bmatrix} \\
P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & p_{3,4} \\ p_{4,1} & p_{4,2} & p_{4,3} & p_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{40} \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 & 11 \\ 11 & -9 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & -9 & 1 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 11 & 1 & 1 & -9 \\ -9 & 11 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & -9 & 11 \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$

i) stejný výsledek dostaneme použitím standardní báze

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}} &= [[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{S}} \quad \dots \quad [\mathbf{e}_4]_{\mathcal{S}}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{F}} &= [[\mathbf{f}_1]_{\mathcal{S}} \quad \dots \quad [\mathbf{f}_4]_{\mathcal{S}}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} &= P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{S}} P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}} = P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{F}}^{-1} P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}}
\end{aligned}$$

protože ($\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$):

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{S}} [\mathbf{u}]_{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{S}} P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{F}}^{-1} P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} .$$

b) Dle definice matice lineárního zobrazení je $(\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}) : [A(\mathbf{u})]_{\mathcal{S}} = \mathbf{A}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{S}}$ a

$$A(\mathbf{s}_1) = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, A(\mathbf{s}_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \Rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{F}}[A(\mathbf{u})]_{\mathcal{F}} = [A(\mathbf{u})]_{\mathcal{S}} = \mathbf{A}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{S}} = \mathbf{A}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}}\mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}$$

$$[A(\mathbf{u})]_{\mathcal{F}} = \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{F}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}}\mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} &= \mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{F}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}}\mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 26 & -13 & -12 & -21 \\ -34 & 37 & 8 & 9 \\ 6 & -23 & 28 & 9 \\ 6 & 7 & -12 & 19 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

c) Připomeneme definici matice bilineární formy. Je-li $\tilde{B} : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ bilineární forma, \mathcal{G} a \mathcal{H} jsou báze prostorů \mathcal{U} a \mathcal{V} , je matice $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}, \mathcal{H}} \in \mathbb{R}^{\dim \mathcal{U} \times \dim \mathcal{V}}$ bilineární formy \tilde{B} vzhledem k bázím \mathcal{G} a \mathcal{H} definována jako

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{G}, \mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \tilde{B}(\mathbf{g}_1, \mathbf{h}_1) & \dots & \tilde{B}(\mathbf{g}_1, \mathbf{h}_{\dim \mathcal{V}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{B}(\mathbf{g}_{\dim \mathcal{U}}, \mathbf{h}_1) & \dots & \tilde{B}(\mathbf{g}_{\dim \mathcal{U}}, \mathbf{h}_{\dim \mathcal{V}}) \end{bmatrix}.$$

Je zřejmé, že matice $\mathbf{B}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}$ bilineární formy B vzhledem ke standardní bázi \mathcal{S} je

$$[\mathbf{B}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}]_{i,j} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}.$$

Využijme již napočítaných matic přechodu k získání matice $\mathbf{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$. Jelikož $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2 \times 2})$ je

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_{\mathcal{S}}^{\top} \mathbf{B}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{S}} = (\mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}})^{\top} \mathbf{B}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}\mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{F}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{F}} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}}^{\top} \mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}}^{\top} \mathbf{B}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}\mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{F}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{F}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} &= \mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}}^{\top} \mathbf{B}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}\mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{\top} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 860 & 848 & 844 & 848 \\ 660 & 648 & 644 & 648 \\ 460 & 448 & 444 & 448 \\ 260 & 248 & 244 & 248 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 215 & 212 & 211 & 212 \\ 165 & 162 & 161 & 162 \\ 115 & 112 & 111 & 112 \\ 65 & 62 & 61 & 62 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Spočítejme matici $B_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ pro kontrolu ještě přímo z definice

$$\begin{aligned}
 [B_{\mathcal{E},\mathcal{F}}]_{1,1} = B(\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 860 \\
 &\vdots \\
 [B_{\mathcal{E},\mathcal{F}}]_{4,4} = B(\mathbf{e}_4, \mathbf{f}_4) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 248.
 \end{aligned}$$

1.6 Skalární součin, norma, ortonormální báze, unitární matice

Bilineární formu $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme pojmem skalární součin právě tehdy, když je symetrická a pozitivně definitní, tedy $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V})(\forall \alpha \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
 (\alpha \odot \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\
 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \\
 (\mathbf{u}, \mathbf{u}) &> 0 \text{ pro } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

Zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá norma, jestliže $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V})(\forall \alpha \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\| &\leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \\
 \|\alpha \odot \mathbf{u}\| &= |\alpha| \|\mathbf{u}\| \\
 \|\mathbf{u}\| = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

Skalární součin $(\cdot, \cdot)_a$ definuje na \mathcal{V} normu $\|\mathbf{u}\|_a = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_a}$, ne každá norma je generována skalárním součinem.

Mějme vektorový prostor se skalárním součinem $(\mathcal{V}, F, \oplus, \odot, (\cdot, \cdot))$ a uspořádanou množinu vektorů $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Množinu \mathcal{E} nazveme

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{ortogonální}} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0 & i \neq j \\ (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) > 0 & i = j \end{cases} \\
 \underline{\text{ortonormální}} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0 & i \neq j \\ (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 1 & i = j. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Příklad 9. Necht' $(\mathcal{V}, F, \oplus_{\mathcal{V}}, \odot_{\mathcal{V}}, (\cdot, \cdot))$ je vektorový prostor se skalárním součinem a vzhledem k němu ortonormální bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Dokažte, že souřadnice $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$ lze vypočítat pomocí vzorce $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E},i} = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_i)$. Výhodou tohoto postupu je možnost paralelizace.

Řešení. Souřadnice $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$ jsou dle definice koeficienty lineární kombinace

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},1} \odot_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_1 \oplus_{\mathcal{V}} \dots \oplus_{\mathcal{V}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},n} \odot_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_n.$$

Proveďme skalární součin obou stran předchozí rovnosti s vektorem \mathbf{e}_i

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) &= ([\mathbf{v}]_{\mathcal{E},1} \odot_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_1 \oplus_{\mathcal{V}} \dots \oplus_{\mathcal{V}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},n} \odot_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i) \\
 &= [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},1}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) + \dots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},n}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},1}\delta_{1,i} + \dots + [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},n}\delta_{n,i} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{E},i}.
 \end{aligned}$$

□

Příklad 10. Připomeňme si Grammův-Schmidtův ortonormalizační proces. Mějme ve vektorovém prostoru se skalárním součinem $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, \oplus_{\mathbb{R}^4}, \odot_{\mathbb{R}^4}, (\cdot, \cdot)_b)$,

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \right)_b = [a \quad b \quad c \quad d] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

podprostor

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \mathcal{V} \subsetneq \mathbb{R}^4.$$

Pomocí Grammova-Schmidtova ortonormalizačního procesu vytvořme ortonormální bázi \mathcal{E} (vzhledem ke skalárnímu součinu $(\cdot, \cdot)_b$) prostoru \mathcal{V} .

Řešení. Grammův-Schmidtův ortonormalizační proces je popsán v [3]. Postupně vytvořme ortonormalizovanou bázi prostorů

$$\langle \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{f}_1 \rangle = \mathcal{V}_1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = \mathcal{V}_2, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \rangle = \mathcal{V}.$$

Pro hledanou ortonormální bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ musí platit

$$\|\mathbf{e}_1\|_b = \sqrt{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)_b} = 1, \quad \|\mathbf{e}_2\|_b = 1, \quad \|\mathbf{e}_3\|_b = 1, \quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)_b = 0, \quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)_b = 0, \quad (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)_b = 0.$$

1. Vektor \mathbf{e}_1 takový, že pro něj platí $\langle \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{f}_1 \rangle$ a současně $\|\mathbf{e}_1\|_b = 1$ je zřejmě

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{f}_1\|_b} \odot_{\mathbb{R}^4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{[1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}} \odot_{\mathbb{R}^4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \odot_{\mathbb{R}^4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6^{-\frac{1}{2}} \\ 6^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Zkonstruuje vektor $\tilde{\mathbf{e}}_2 \in \mathcal{V}_2 = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 \rangle$, tedy $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{f}_2 \oplus_{\mathbb{R}^4} (-\alpha) \odot_{\mathbb{R}^4} \mathbf{e}_1$ tak aby

$$0 = (\tilde{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_1)_b = (\mathbf{f}_2 \oplus_{\mathbb{R}^4} (-\alpha) \odot_{\mathbb{R}^4} \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)_b = (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)_b - \alpha (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)_b = (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)_b - \alpha,$$

tedy

$$\alpha = (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)_b = \frac{1}{\sqrt{6}} \left([0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus_{\mathbb{R}^4} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \odot_{\mathbb{R}^4} \begin{bmatrix} 6^{-\frac{1}{2}} \\ 6^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \odot_{\mathbb{R}^4} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{e}}_2\|_b} \odot_{\mathbb{R}^4} \tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} \left([-1 \quad 2 \quad 3 \quad 0] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}} \odot_{\mathbb{R}^4} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \odot_{\mathbb{R}^4} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Nyní vás stejně jako nás zřejmě otravuje neustálé používání zápisu $\oplus_{\mathbb{R}^4}$ a $\odot_{\mathbb{R}^4}$ při každém výskytu těchto operací. Proto je zde nebudeme explicitně zapisovat, jelikož jejich výskyt bude dostatečně zřejmý ze zápisu. Zkonstruujme vektor $\tilde{\mathbf{e}}_3 \in \mathcal{V} = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_3 \rangle$, tedy $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{f}_3 - \alpha \mathbf{e}_1 - \beta \mathbf{e}_2$ tak aby

$$\begin{aligned} 0 &= (\tilde{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_1)_b = (\mathbf{f}_3 - \alpha \mathbf{e}_1 - \beta \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)_b = (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1)_b - \alpha(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)_b - \beta(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)_b = (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1)_b - \alpha \\ 0 &= (\tilde{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_2)_b = (\mathbf{f}_3 - \alpha \mathbf{e}_1 - \beta \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)_b = (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2)_b - \alpha(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)_b - \beta(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)_b = (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2)_b - \beta, \end{aligned}$$

tedy

$$\alpha = (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1)_b = \frac{1}{\sqrt{6}} \left([0 \ 0 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

$$\beta = (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2)_b = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left([0 \ 0 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{7}{4\sqrt{3}}$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{7}{4\sqrt{3}} \right) \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{e}}_2\|_b} \tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16^2} \left([5 \ -2 \ 9 \ 16] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix} \right)}} \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{77}} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Shrnuto

$$\mathcal{E} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{4\sqrt{77}} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix} \right).$$

□

2 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

2.1 Komplexní čísla

K vektorovému prostoru $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus_{\mathbb{R}^2}, \odot_{\mathbb{R}^2})$ přidáme operaci násobení vektorem

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \odot_{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix}$$

a označíme $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus_{\mathbb{R}^2}, \odot_{\mathbb{R}^2}, \odot_{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2})$ takto vzniklou pěticí \mathbb{C} . Lze ukázat, že $(\mathbb{C}, \oplus_{\mathbb{C}}, \odot_{\mathbb{C}})$, kde

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \quad \oplus_{\mathbb{C}} = \oplus_{\mathbb{R}^2}, \quad \odot_{\mathbb{C}} = \odot_{\mathbb{R}^2}$$

je těleso, které nazveme pojmem těleso komplexních čísel. Obvykle zapisujeme

$$a + bi = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Více viz [4], kapitola 2.

Příklad 11. Ukažte, že inverzní komplexní číslo je nutno definovat jako

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{bmatrix}.$$

Řešení. Inverzní komplexních číslo z^{-1} k číslu $z = a + bi$ je třeba nadefinovat tak, aby platilo $z \odot_{\mathbb{C}} z^{-1} = w$, kde w je neutrální prvek vzhledem k násobení komplexních čísel, tj

$$z \odot_{\mathbb{C}} w = z \Rightarrow (a + bi) = (a + bi) \odot_{\mathbb{C}} (w_1 + w_2i) = (aw_1 - bw_2 + i(aw_2 + bw_1)),$$

což platí pouze pro $w = (1 + 0i)$. Proto

$$z^{-1} = (c + di) : (1 + 0i) = w = z \odot_{\mathbb{C}} z^{-1} = (a + bi) \odot_{\mathbb{C}} (c + di) = (ac - bd + i(ad + bc)).$$

Rozepsáním rovnosti mezi komplexními čísly dostaneme

$$1 = ac - bd \tag{r_1}$$

$$0 = bc + ad \tag{r_2}$$

$$ar_1 + br_2 : a = (a^2 + b^2)c$$

$$br_1 - ar_2 : b = -(a^2 + b^2)d,$$

což je ekvivalentní vzorci, který jsme chtěli dokázat. □

2.2 Pojmy z integrálních a diskrétních transformací

- Fourierova transformace

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

- Fourierovy řady

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{aligned}, \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

- Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i n k}{N}}, \quad f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{\frac{2\pi i n k}{N}}$$

2.3 (DFT) Diskrétní Fourierova transformace (v 1D)

Poznámka 12. V této kapitole budeme indexovat složky vektorů od nuly (jako v **C**, **C++**, **Pythonu**, ...) a ne od jedničky (jako v **MatLabu**).

Mějme vektorový prostor se skalárním součinem $(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}, \oplus, \odot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{s=0}^{N-1} [\mathbf{u}]_s \overline{[\mathbf{v}]_s},$$

a v něm bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{N-1})$,

$$\mathbf{e}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[e^{\frac{2\pi i k 0}{N}} \quad \dots \quad e^{\frac{2\pi i k l}{N}} \quad \dots \quad e^{\frac{2\pi i k (N-1)}{N}} \right]^\top, \quad k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Jelikož

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle &= \sum_{s=0}^{N-1} [\mathbf{e}_k]_s \overline{[\mathbf{e}_l]_s} = \sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i k s}{N}} \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i l s}{N}}} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k s}{N}} e^{-\frac{2\pi i l s}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i (k-l)s}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i (k-l)}{N}} \right)^s = \begin{cases} \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{\frac{2\pi i (k-l)N}{N}}}{1 - e^{\frac{2\pi i (k-l)}{N}}} = 0 & k \neq l \\ \frac{N}{N} = 1 & k = l, \end{cases} \end{aligned}$$

je báze \mathcal{E} ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ve výpočtu jsme využili součtového vzorce pro geometrickou posloupnost

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Tento jednoduchý postup (a zřejmě ne příliš efektivní) je naprogramován v **Matlabovském Kódu 5**

Listing 5: dft_matrix.m

```
1 function DFT = dft_matrix(n)
2 ii = 0:1:n-1;           % row vector for i
3 jj = 0:1:n-1;           % row vector for j
4 w = exp(-1j*2*pi/n);    % factor (w)
5 DFT = w.^(ii'*jj);      % DFT matrix
```

Příklad 13. Zkonstruujte bázi \mathcal{E} pro \mathbb{C}^4 . Určete $\left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^\top \right]_{\mathcal{E}}$.

Řešení. Dle definice báze \mathcal{E} je

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) &= \left(\frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot 0}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot 1}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot 2}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot 3}{4}} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot 0}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot 1}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot 2}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 1 \cdot 3}{4}} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i \cdot 2 \cdot 0}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 2 \cdot 1}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 2 \cdot 2}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 2 \cdot 3}{4}} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i \cdot 3 \cdot 0}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 3 \cdot 1}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 3 \cdot 2}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i \cdot 3 \cdot 3}{4}} \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

n	10	10^3	10^6	10^9	10^{12}
n^2	10^2	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{24}
$n \log_2 n$	3.3e1	10^4	$2 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^{13}$

Tabulka 2: Srovnání funkcí n^2 a $n \log_2 n$.

Zbývá určit souřadnice $\mathbf{v} = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^\top$ v bázi \mathcal{E} , které spočteme jako $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{S}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{S}}$, kde $[\mathbf{v}]_{\mathcal{S}} = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^\top$ a

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_4 \stackrel{\text{ozn.}}{=} \mathbf{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{S}} &= \mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}}^{-1} = \overline{\mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}}}^\top = \overline{[[\mathbf{e}_0]_{\mathcal{S}}, \dots, [\mathbf{e}_3]_{\mathcal{S}}]^\top} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4 & \omega_4^2 & \omega_4^3 \\ 1 & \omega_4^2 & \omega_4^4 & \omega_4^6 \\ 1 & \omega_4^3 & \omega_4^6 & \omega_4^9 \end{bmatrix}, \quad \omega_4 = e^{\frac{2\pi i}{4}} \end{aligned}$$

tedy $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = [10 \ (-2 + 2i) \ -2 \ (-2 - 2i)]^\top$ □

Nyní bychom mohli využít ortonormální báze \mathcal{E} pro zavedení diskrétní transformace přiřazující vektoru $\mathbf{u} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{S}} \in \mathbb{C}^N$ jeho souřadnice $[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} \in \mathbb{C}^N$ v bázi \mathcal{E} . Toto lineární zobrazení by popisovaly matice transformace $\mathbf{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{S}}$ a zpětné transformace $\mathbf{P}_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{E}} = \mathbf{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{S}}^{-1}$. Z historických důvodů je však diskrétní Fourierova transformace zavedena jako lineární zobrazení přiřazující vektoru $\mathbf{u} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{S}} \in \mathbb{C}^N$ vektor $\hat{\mathbf{u}} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sqrt{N} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} \in \mathbb{C}^N$. Jelikož

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}, l} \mathbf{e}_l \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_k \rangle &= \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}, l} \langle \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}, l} \delta_{k, l} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}, k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{\mathbf{u}}_k, \end{aligned}$$

platí pro diskrétní Fourierův obraz

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \sqrt{N} [\mathbf{u}]_{\mathcal{E}, k} = \sqrt{N} \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_k \rangle = \sqrt{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\mathbf{u}]_n \overline{[\mathbf{e}_k]_n} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{u}_n e^{\frac{-2\pi i k n}{N}}. \quad (15)$$

Dle tohoto vzorce je pro výpočet $\hat{\mathbf{u}}$ nutné určit všechny (je jich N) složky a výpočet každé z nich zahrnuje provedení N komplexních násobení a $N-1$ komplexních sčítání. Potřebujeme tedy cca $O(N^2)$ operací.

Z obrazu $\hat{\mathbf{u}}$ lze zpětně rekonstruovat původní \mathbf{u} pomocí zpětné Fourierovy transformace

$$\mathbf{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\mathbf{u}}_n e^{\frac{2\pi i k n}{N}}. \quad (16)$$

2.4 (FFT) Rychlá Fourierova transformace (v 1D)

Uvedeme si postup, který potřebuje pouze $O(N \log_2 N)$ operací, což pro velká N umožňuje několikařádově rychlejší transformaci (a také zpětnou transformaci, jelikož ta je výpočetně podobná), viz tabulka 2. Pro jednoduchost předpokládáme, že $N = 2^b$.

Předtím, než začneme probírat DFT pro obecné b , uveďme si zde příklad pro $b = 3$, $N = 8$. Diskrétní Fourierův obraz $\hat{\mathbf{u}}_8$ vektoru $\mathbf{u}_8 \in \mathbb{C}^8$ získáme (čtenář si laskavě připomene Příklad 13) přenásobením

$$\hat{\mathbf{u}}_8 = \mathbf{F}_8 \mathbf{u}_8$$

kde

$$\mathbf{F}_8 = \begin{bmatrix} \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 & \omega_8^0 \\ \omega_8^0 & \omega_8^{-1} & \omega_8^2 & \omega_8^3 & \omega_8^4 & \omega_8^5 & \omega_8^6 & \omega_8^7 \\ \omega_8^0 & \omega_8^2 & \omega_8^4 & \omega_8^6 & \omega_8^8 & \omega_8^{10} & \omega_8^{12} & \omega_8^{14} \\ \omega_8^0 & \omega_8^3 & \omega_8^6 & \omega_8^9 & \omega_8^{12} & \omega_8^{15} & \omega_8^{18} & \omega_8^{21} \\ \omega_8^0 & \omega_8^4 & \omega_8^8 & \omega_8^{12} & \omega_8^{16} & \omega_8^{20} & \omega_8^{24} & \omega_8^{28} \\ \omega_8^0 & \omega_8^5 & \omega_8^{10} & \omega_8^{15} & \omega_8^{20} & \omega_8^{25} & \omega_8^{30} & \omega_8^{35} \\ \omega_8^0 & \omega_8^6 & \omega_8^{12} & \omega_8^{18} & \omega_8^{24} & \omega_8^{30} & \omega_8^{36} & \omega_8^{42} \\ \omega_8^0 & \omega_8^7 & \omega_8^{14} & \omega_8^{21} & \omega_8^{28} & \omega_8^{35} & \omega_8^{42} & \omega_8^{49} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_8 & \omega_8^2 & \omega_8^3 & \omega_8^4 & \omega_8^5 & \omega_8^6 & \omega_8^7 \\ 1 & \omega_8^2 & \omega_8^4 & \omega_8^6 & 1 & \omega_8^2 & \omega_8^4 & \omega_8^6 \\ 1 & \omega_8^3 & \omega_8^6 & \omega_8^9 & \omega_8^4 & \omega_8^7 & \omega_8^2 & \omega_8^5 \\ 1 & \omega_8^4 & \omega_8^8 & \omega_8^{12} & 1 & \omega_8^4 & \omega_8^8 & \omega_8^{12} \\ 1 & \omega_8^5 & \omega_8^{10} & \omega_8^{15} & \omega_8^4 & \omega_8^7 & \omega_8^2 & \omega_8^5 \\ 1 & \omega_8^6 & \omega_8^{12} & \omega_8^{18} & \omega_8^4 & \omega_8^7 & \omega_8^2 & \omega_8^5 \\ 1 & \omega_8^7 & \omega_8^{14} & \omega_8^{21} & \omega_8^4 & \omega_8^7 & \omega_8^2 & \omega_8^5 \end{bmatrix}$$

Násobení matice–sloupec má složitost n^2 . V našem případě však lze vyzorovat, že matice \mathbf{F}_8 má speciální strukturu (například je symetrická), a násobení touto maticí lze provést s efektivnější složitostí. Všimneme si, že přeuspořádáme-li sloupce tak, že vezmeme nejprve liché a pak sudé ($\text{per}_8 = [0, 2, 4, 6, 1, 3, 5, 7]$), dostaneme matici

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_8[:, \text{per}_8] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_8^2 & \omega_8^4 & \omega_8^6 & \omega_8 & \omega_8^3 & \omega_8^5 & \omega_8^7 \\ 1 & \omega_8^4 & 1 & \omega_8^4 & \omega_8^2 & \omega_8^6 & \omega_8^2 & \omega_8^6 \\ 1 & \omega_8^6 & \omega_8^4 & \omega_8^2 & \omega_8^3 & \omega_8 & \omega_8^7 & \omega_8^3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \omega_8^4 & \omega_8^4 & \omega_8^4 & \omega_8^4 \\ 1 & \omega_8^2 & \omega_8^4 & \omega_8^6 & \omega_8^5 & \omega_8^7 & \omega_8 & \omega_8^3 \\ 1 & \omega_8^4 & 1 & \omega_8^4 & \omega_8^6 & \omega_8^2 & \omega_8^6 & \omega_8^2 \\ 1 & \omega_8^6 & \omega_8^4 & \omega_8^2 & \omega_8^7 & \omega_8^3 & \omega_8^3 & \omega_8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_8^0 \cdot \omega_4^0 & \omega_8^0 \cdot \omega_4^0 & \omega_8^0 \cdot \omega_4^0 & \omega_8^0 \cdot \omega_4^0 \\ \omega_4^0 & \omega_4^1 & \omega_4^2 & \omega_4^3 & \omega_8^1 \cdot \omega_4^0 & \omega_8^1 \cdot \omega_4^1 & \omega_8^1 \cdot \omega_4^2 & \omega_8^1 \cdot \omega_4^3 \\ \omega_4^0 & \omega_4^2 & \omega_4^0 & \omega_4^2 & \omega_8^2 \cdot \omega_4^0 & \omega_8^2 \cdot \omega_4^1 & \omega_8^2 \cdot \omega_4^2 & \omega_8^2 \cdot \omega_4^3 \\ \omega_4^0 & \omega_4^3 & \omega_4^1 & \omega_4^1 & \omega_8^3 \cdot \omega_4^0 & \omega_8^3 \cdot \omega_4^1 & \omega_8^3 \cdot \omega_4^2 & \omega_8^3 \cdot \omega_4^3 \\ \hline \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_8^4 \cdot \omega_4^0 & \omega_8^4 \cdot \omega_4^1 & \omega_8^4 \cdot \omega_4^2 & \omega_8^4 \cdot \omega_4^3 \\ \omega_4^0 & \omega_4^1 & \omega_4^2 & \omega_4^3 & \omega_8^5 \cdot \omega_4^0 & \omega_8^5 \cdot \omega_4^1 & \omega_8^5 \cdot \omega_4^2 & \omega_8^5 \cdot \omega_4^3 \\ \omega_4^0 & \omega_4^2 & \omega_4^0 & \omega_4^2 & \omega_8^6 \cdot \omega_4^0 & \omega_8^6 \cdot \omega_4^1 & \omega_8^6 \cdot \omega_4^2 & \omega_8^6 \cdot \omega_4^3 \\ \omega_4^0 & \omega_4^3 & \omega_4^1 & \omega_4^1 & \omega_8^7 \cdot \omega_4^0 & \omega_8^7 \cdot \omega_4^1 & \omega_8^7 \cdot \omega_4^2 & \omega_8^7 \cdot \omega_4^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 & \begin{bmatrix} \omega_8^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_8^3 \end{bmatrix} & \mathbf{F}_4 \\ \hline \mathbf{F}_4 & \begin{bmatrix} \omega_8^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_8^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_8^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_8^7 \end{bmatrix} & \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 & \begin{bmatrix} \omega_8^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_8^3 \end{bmatrix} & \mathbf{F}_4 \\ \hline \mathbf{F}_4 & - \begin{bmatrix} \omega_8^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_8^3 \end{bmatrix} & \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{F}_4 & \mathbf{D}_4 \mathbf{F}_4 \\ \hline \mathbf{F}_4 & -\mathbf{D}_4 \mathbf{F}_4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Pro násobení vektorem tedy platí

$$\hat{\mathbf{u}}_8 = \mathbf{F}_8 \mathbf{u}_8 = \mathbf{F}_8[:, \text{per}_8] \cdot \mathbf{u}_8[\text{per}_8] = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 & \mathbf{D}_4 \mathbf{F}_4 \\ \mathbf{F}_4 & -\mathbf{D}_4 \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_4^s \\ \mathbf{u}_4^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 \mathbf{u}_4^s + \mathbf{D}_4 \mathbf{F}_4 \mathbf{u}_4^l \\ \mathbf{F}_4 \mathbf{u}_4^s - \mathbf{D}_4 \mathbf{F}_4 \mathbf{u}_4^l \end{bmatrix}$$

Místo násobení vektoru maticí 8×8 potřebujeme vynásobit maticí 4×4 dva vektory poloviční délky. Zabývali jsme se zde pouze operacemi se složitostí větší než n , sčítání vektorů a násobení diagonální maticí D_4 mají složitost n . Stejnou strukturu lze pozorovat nejen na

$$\begin{aligned} F_4 &= \begin{bmatrix} \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 \\ \omega_4^0 & \omega_4^1 & \omega_4^2 & \omega_4^3 \\ \omega_4^0 & \omega_4^2 & \omega_4^4 & \omega_4^6 \\ \omega_4^0 & \omega_4^3 & \omega_4^6 & \omega_4^9 \end{bmatrix} \\ F_4[:, \text{per}_4] &= \begin{bmatrix} \omega_2^0 & \omega_2^0 & \omega_4^0 \cdot \omega_2^0 & \omega_4^0 \cdot \omega_2^0 \\ \omega_2^0 & \omega_2^1 & \omega_4^1 \cdot \omega_2^0 & \omega_4^1 \cdot \omega_2^1 \\ \omega_2^0 & \omega_2^0 & \omega_4^2 \cdot \omega_2^0 & \omega_4^2 \cdot \omega_2^1 \\ \omega_2^0 & \omega_2^1 & \omega_4^3 \cdot \omega_2^0 & \omega_4^3 \cdot \omega_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & \begin{bmatrix} \omega_4^0 & 0 \\ 0 & \omega_4^1 \end{bmatrix} F_2 \\ F_2 & - \begin{bmatrix} \omega_4^0 & 0 \\ 0 & \omega_4^1 \end{bmatrix} F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & D_2 F_2 \\ F_2 & -D_2 F_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\text{per}_4 = [0, 2, 1, 3]$, ale na všech $F_2, F_4, F_8, F_{16}, \dots, F_{2^n}$.

Nyní přistupme k DFT pro $N = 2^b$. Označme

$$w_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}} \quad (17)$$

a uvědomme si, že pro w_N platí

$$\begin{aligned} (\text{symetrie}): \quad w_N^{k(N-n)} &= w_N^{-kn} = \overline{w_N^{kn}} \\ (\text{periodicita}): \quad w_N^{kn} &= w_N^{k(N+n)} = w_N^{(k+N)n}. \end{aligned}$$

Pak ($\forall k \in 0, \dots, N-1$)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{u}_n e^{-\frac{2\pi i kn}{N}} = \sum_{\substack{n \in 0, \dots, N-1 \\ n \text{ je sudé}}} \mathbf{u}_n w_N^{kn} + \sum_{\substack{n \in 0, \dots, N-1 \\ n \text{ je liché}}} \mathbf{u}_n w_N^{kn} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathbf{u}_{2r} w_N^{k2r} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathbf{u}_{2r+1} w_N^{k(2r+1)} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathbf{u}_{2r} (w_N^2)^{kr} + w_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathbf{u}_{2r+1} (w_N^2)^{kr} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathbf{u}_{2r} w_N^{kr} + w_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathbf{u}_{2r+1} w_N^{kr} \\ &= \hat{\mathbf{u}}_{\text{sudé}, k} + w_N^k \hat{\mathbf{u}}_{\text{liché}, k}, \end{aligned}$$

kde jsme v poslední rovnosti využili periodicity $w_N^{rk} = w_N^{r(k+\frac{N}{2})}$. Rozepsáním poslední rovnosti dostaneme ($\forall k \in 0, \dots, \frac{N}{2}-1$)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_k &= \hat{\mathbf{u}}_{\text{sudé}, k} + w_N^k \hat{\mathbf{u}}_{\text{liché}, k} \\ \hat{\mathbf{u}}_{k+\frac{N}{2}} &= \hat{\mathbf{u}}_{\text{sudé}, k} + w_N^{k+\frac{N}{2}} \hat{\mathbf{u}}_{\text{liché}, k} = \hat{\mathbf{u}}_{\text{sudé}, k} - w_N^k \hat{\mathbf{u}}_{\text{liché}, k} \end{aligned}$$

jelikož

$$w_N^{k+\frac{N}{2}} = w_N^k w_N^{\frac{N}{2}} = w_N^k e^{-\frac{2\pi i}{N} \frac{N}{2}} = w_N^k e^{-\pi i} = -w_N^k.$$

Tento jednoduchý postup je naprogramován v Matlabovském Kódu 6 a testovací skript je uveden v Kódu 7.

Listing 6: fft_rec.m

```

1 function y = fft_rec(x)
2 if size(x,1) < size(x,1)
3     x=x';
4 end
5 N = size(x,1);
6 if N == 1
7     y = x;
8 else
9     omega = exp(-2*pi*1i/N);
10    k = (0:N/2-1)';
11    w = omega.^k;
12    y_e = fft_rec( x(1:2:end-1) ); % FFT of even x
13    y_o = w.*fft_rec( x(2:2:end) ); % FFT of odd x
14    y = [y_e+y_o; y_e-y_o];
15 end

```

Listing 7: fft_test.m

```

1 n = 11; eeps = 1e-3;
2 x = (0:2^n-1)/(2^n-1);
3 y = 40*sin(1*2*pi*x)+30*cos(2*2*pi*x)+20*sin(3*2*pi*x)+10*cos(4*2*pi*x);
4 fprintf(1, ' Y:                nnz: %03d\n', nnz(y));
5 % DFT
6 DFT = dft_matrix(2^n);
7 t_start = tic;      y_dft = DFT*y;      t_end = toc(t_start);
8 y_dft(abs(y_dft)<eeps*max(abs(y_dft))) = 0; % thresholding
9 fprintf(1, 'DFT : ... [%5.4f s], thresholded nnz: %03d\n', t_end, nnz(y_dft));
10 % FFT_REC
11 t_start = tic;      y_fftr = fft_rec(y); t_end = toc(t_start);
12 y_fftr(abs(y_fftr)<eeps*max(abs(y_fftr))) = 0; % thresholding
13 fprintf(1, 'FFTr: ... [%5.4f s], thresholded nnz: %03d\n', t_end, nnz(y_fftr));
14 % FFT_ITER
15 t_start = tic;      y_ffti = fft_iter(y); t_end = toc(t_start);
16 y_ffti(abs(y_ffti)<eeps*max(abs(y_ffti))) = 0; % thresholding
17 fprintf(1, 'FFTi: ... [%5.4f s], thresholded nnz: %03d\n', t_end, nnz(y_ffti));
18 % plotting
19 figure(1); hold on;
20 plot(x,y, '-r');
21 plot(x,real(DFT'*y_dft)/2^n, '-b');
22 plot(x,real(DFT'*y_fftr)/2^n, '-k');
23 figure(2); hold on;
24 plot(x,real(y_dft), '-r');

```

Jelikož zpětná diskretní Fourierova transformace (16) se od Fourierovy transformace (15) liší pouze znaménkem ve w_N (srovnej (17), (16) a (15)), lze algoritmem pro FFT počítat také zpětnou diskretní Fourierovu transformaci (se dvěma drobnými změnami – změnou znaménka v exponentu w_N a násobením N^{-1}). Uvedeme si ještě Kód 8, který je iteračním ekvivalentem rekurzivního kódu FFT.

Listing 8: fft_iter.m

```

1 function data_ = fft_iter(data_)
2
3 N = size(data_,1);
4 b = log2(N);
5 % preprocessing
6 for iii = 1:b-1
7     cell_size = 2^(b-iii+1);
8     cell_count = 2^(iii-1);
9     for jjj = 1:cell_count
10        cell_ind = (jjj-1)*cell_size+1:jjj*cell_size;
11        data_halfind_odd = data_(cell_ind(1:2 :end-1));

```

```

12     data_halfind_even = data_(cell_ind(2:2 :end ));
13     cell_halfind_first = cell_ind(1 :end/2);
14     cell_halfind_second = cell_ind(end/2+1:end );
15     data_(cell_halfind_first) = data_halfind_odd;
16     data_(cell_halfind_second) = data_halfind_even;
17     end
18 end
19 % iterative fft
20 for iii = 1:b
21     cell_size = 2^iii;
22     omega = exp(2*pi*1i/cell_size);
23     w = (omega.^(0:cell_size/2-1))';
24     for jjj = 1:2^(b-iii)
25         cell_ind = (jjj-1)*cell_size+1:jjj*cell_size;
26         data_cell = data_(cell_ind);
27         data_halfcell_first = data_cell( 1:end/2);
28         data_halfcell_second = w.*data_cell(end/2+1:end);
29         data_(cell_ind(1 :end/2)) = data_halfcell_first + data_halfcell_second;
30         data_(cell_ind(end/2+1:end )) = data_halfcell_first - data_halfcell_second;
31     end
32 end

```

2.5 DFT ve 2D (ve více dimenzích)

Mějme vektorový prostor $(\mathbb{C}^{m \times n}, \mathbb{C},)$

$$\hat{\mathbf{u}}_{k,l} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{u}_{m,n} e^{-2\pi i \left(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N} \right)}$$

$$\mathbf{u}_{m,n} = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\mathbf{u}}_{m,n} e^{2\pi i \left(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N} \right)}$$

3 Vybrané rozklady matic

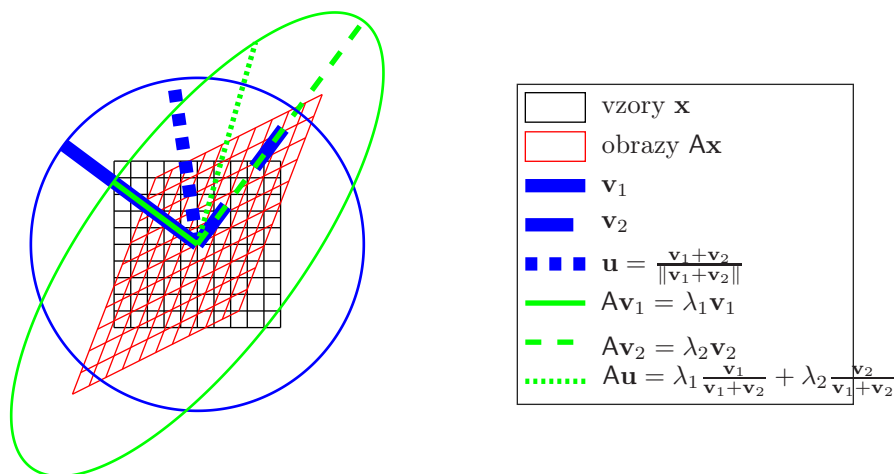
Dříve, než začneme kapitolu o vybraných rozkladech matic, připomeňme si ze základního kurzu lineární algebry geometrický význam vlastních čísel a vlastních vektorů matice. Mějme například symetrickou matici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.3 \end{bmatrix}.$$

Na Obrázku 7 vidíme černou a červenou čtvercovou mřížku bodů z \mathbb{R}^2 . Pokud přenásobíme každý z bodů černé mřížky maticí A , dostaneme červenou mřížku. Dále vidíme na Obrázku 7 dva vektory

$$\mathbf{v}_1 \simeq \begin{bmatrix} -0.8023 \\ 0.5969 \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{v}_2 \simeq \begin{bmatrix} 0.5969 \\ 0.8023 \end{bmatrix}$$

jednotkové délky, které jsou zvláštní tím, že vektory $A\mathbf{v}_1$ a $A\mathbf{v}_2$ jsou s nimi rovnoběžné. Tyto vektory jsou vlastními vektory matice A . Vlastní vektory jsou navíc na sebe kolmé. Vidíme také vektor $\mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|$, který má opět jednotkovou délku, ale jeho obraz $A\mathbf{u}$ již s ním rovnoběžný není.



Obrázek 7: Vlastní vektory - motivace

Obrazy $A\mathbf{v}_1$ a $A\mathbf{v}_2$ vektorů \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 jsou s nimi rovnoběžné, tedy existují λ_1 , λ_2 takové, že

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \text{ a } A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2.$$

Číslům λ_1 , λ_2 říkáme vlastní čísla matice A . Pokud použijeme vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 jako sloupce ortonormální matice

$$V = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2], \quad VV^T = I,$$

platí

$$AV = VD, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.8023 & 0.5969 \\ 0.5969 & 0.8023 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8023 & 0.5969 \\ 0.5969 & 0.8023 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6280 & 0 \\ 0 & 1.6720 \end{bmatrix}$$

Přenásobíme-li obě strany rovnice $\mathbf{AV} = \mathbf{VD}$ ortonormální maticí \mathbf{V}^\top zleva, respektive zprava, dostaneme vztahy

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}^\top \mathbf{AV}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{VDV}^\top. \quad (18)$$

Všimněme si ale, že vlastní vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 tvoří ortonormální bázi prostoru \mathbb{R}^2 . V podkapitole 1.5, vzorec (14), jsme si ukázali, že souřadnice vektoru se při změně báze (ze staré báze \mathcal{E} do nové báze \mathcal{F}) mění

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{P}_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}, \quad \mathbf{P}_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} = [[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{F}} \cdots [\mathbf{e}_n]_{\mathcal{F}}]$$

přenásobením maticí $\mathbf{P}_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}$ zleva. Dokonce můžeme určit matici přechodu

$$\mathbf{P}_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} = \mathbf{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F}}^{-1} = [[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{E}} \quad [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{E}}]^{-1} = \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^\top \simeq \begin{bmatrix} -0.8023 & 0.5969 \\ 0.5969 & 0.8023 \end{bmatrix}$$

od souřadnic ve standardní bázi $\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ k bázi $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Podívejme se na vzorec (18) z pohledu změny báze. Mějme vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a jeho obraz $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. Víme, že pro všechny $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathbf{w} = [\mathbf{w}]_{\mathcal{E}}, \quad [\mathbf{w}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{P}_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}} [\mathbf{w}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{V}^\top \mathbf{w},$$

tedy

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} &= \mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \mathbf{A} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{VDV}^\top [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \\ \mathbf{V}^\top [\mathbf{y}]_{\mathcal{E}} &= \mathbf{V}^\top \mathbf{VDV}^\top [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{DV}^\top [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \\ [\mathbf{y}]_{\mathcal{F}} &= \mathbf{D} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Právě jsme zjistili, že použijeme-li místo standardní báze \mathcal{E} prostoru \mathbb{R}^2 novou bázi \mathcal{F} , budeme místo matice \mathbf{A} používat diagonální matici \mathbf{D} .

Student si rozmyslí, jaký je rozdíl při řešení soustav s plnou maticí a nebo s diagonální maticí. Jak se bude lišit výpočetní náročnost z hlediska počtu násobení reálných čísel pro soustavy velikosti n ? Jakým lze paralelizovat řešení soustavy s plnou maticí a jak s diagonální maticí?

3.1 Vybrané ortonormální transformace

V základním kurzu lineární algebry byly zavedeny elementární řádkové operace a jejich maticová reprezentace. Sloužily nám například k popisu Gaussovy eliminační metody a LU rozkladu. Každá elementární řádková úprava byla reprezentována násobením regulární maticí \mathbf{T}_i zleva. Sekvence elementárních řádkových úprav odpovídala násobení zleva maticí $\mathbf{T} = \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_1$. Součin regulárních matic je rovněž regulární, násobení obou stran soustavy lineárních rovností regulární maticí nemění řešení a proto lze soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ upravit na

$$(\mathbf{TA})\mathbf{x} = \mathbf{Cx} = \mathbf{Tb}.$$

Úpravy volíme tak, aby matice \mathbf{C} byla pro řešení soustav vhodnější. Například když je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ libovolná matice, lze soustavu řešit za použití $O(n^3)$ operací mezi reálnými čísly. Pokud je matice \mathbf{C} „lepší“, lze výpočetní náročnost zredukovat.

matice \mathbf{C}	řešení soustavy	spektrální rozklad $\mathbf{C} = \mathbf{C}^\top$
plná	$O(n^3)$	$O(n^4)$
trojúhelníková	$O(n^2)$	-
tridiagonální	$O(n)$	$O(n \ln(n))$
bidiagonální	$O(n)$	-
diagonální	$O(n)$	$O(n)$

https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_complexity_of_mathematical_operations#Matrix_algebra

Jelikož se budeme v následujících kapitolách zabývat vybranými rozklady matic, kdy vždy alespoň jedna z výsledných matic je ortonormální, probereme si v této kapitole dvě známé transformace, jejichž transformační matice je ortonormální. Pokud budeme pomocí sekvence těchto ortonormálních transformací schopni převést vstupní matici na požadovaný tvar, bude výsledná transformační matice ortonormální. Například pokud budeme chtít rozložit matici A na součin QB , kde matice Q je ortonormální a matice B je „pěknější“ (třeba horní trojúhelníková) než A a povede se nám to pomocí sekvence ortonormálních transformací

$$A \rightarrow A_1 = T_1 A \rightarrow A_2 = T_2 A_1 \rightarrow A_3 = T_3 A_2 \rightarrow \dots \rightarrow B = T_n A_{n-1}$$

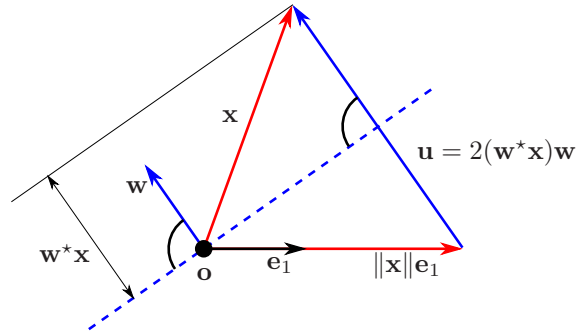
lze psát

$$B = T_n A_{n-1} = \dots = T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1 A = TA, \quad \text{kde } T = T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1.$$

Požadovaný rozklad $A = QB = T^{-1}B = T^T B$ už obdržíme snadno. Jelikož jsou všechny matice T_1, \dots, T_n ortonormální a součin ortonormálních matic zůstává ortonormální, je matice T i její transpozice Q ortonormální.

Tak nyní už ke slibovaným dvěma ortonormálním transformacím. Podívejme se na úlohu, kdy chceme zobrazit vektor \mathbf{x} na vektor rovnoběžný s vektorem \mathbf{e}_1 tak, aby výsledný vektor měl stejnou délku jako vektor \mathbf{x} . Výsledkem tedy bude $\|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1$, nebo $-\|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1$. Takový výsledek umíme geometricky reprezentovat dvěma transformacemi: zrcadlením, nebo rotací.

3.1.1 Householderovo zrcadlení



Obrázek 8: Householderovo zrcadlení

Mějme vektor \mathbf{x} , který chceme zrcadlit na $\|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1$. Zrcadlení je dáno nadrovinou, která v našem případě bude procházet nulovým vektorem, aby výsledná transformace byla lineární a dala se pak reprezentovat násobením maticí zleva. Takovou nadrovinu určíme k ní kolmým vektorem \mathbf{w} , po kterém budeme navíc požadovat jednotkovou délku, viz Obrázek 8. Zrcadlením vektoru \mathbf{x} se nemění jeho délka, obraz tedy bude mít délku $\|\mathbf{x}\|$ a lze jej zapsat jako $\|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1$. Z Obrázku 8 je patrné, že výsledný obraz $\|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{u}$, kde vektoru \mathbf{u} je dvojnásobkem průmětu vektoru \mathbf{x} do směru daného jednotkovým vektorem \mathbf{w} . Celé si to můžeme zapsat jako přenásobení zleva maticí H :

$$H\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{u} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{w})\mathbf{w} = \mathbf{x} - 2\mathbf{w}(\mathbf{w}^*\mathbf{x}) = (\mathbf{I} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^*)\mathbf{x}, \quad \|\mathbf{w}\| = 1,$$

kde $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1 = 2(\mathbf{x}, \mathbf{w})\mathbf{w}$, tedy

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1\|}. \quad (19)$$

Nejprve si dokážeme několik vlastností matice H .

- H je symetrická, jelikož $H^* = (I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^*)^* = I^* - 2(\mathbf{w}\mathbf{w}^*)^* = I - 2(\mathbf{w}^*)^* \mathbf{w}^* = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^* = H$.
- H je ortonormální (dokonce $H^{-1} = H$), jelikož $HH = (I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^*)(I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^*) = I - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^* + \underbrace{4\mathbf{w}\mathbf{w}^*\mathbf{w}\mathbf{w}^*}_{=1} = I$.

V případě, že $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) < 0$ chceme vektor \mathbf{x} zrcadlit na vektor $-\|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1$ a změní se $-\|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{u}$ a tedy i předpis pro

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1\|}. \quad (20)$$

Příklad 14. Najděte ortonormální matici H takovou, že převede matici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

na horní trojúhelníkovou.

Řešení. Nejprve najdeme matici H_1 Householderova zrcadlení, které první sloupec $\mathbf{x}_1 = \mathbf{s}_1(A) = [2, -1, 2]^T$ matice A převede na $3\mathbf{e}_1$. Použili jsme vzorec (19) a ne (20), protože $(\mathbf{x}_1, \mathbf{e}_1) = 6 > 0$ a $\|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$. Pak

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ H_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ A_1 = H_1 A &= \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matici $H_1 A$ není horní trojúhelníková, ale k našemu cíli už potřebujeme pouze dostat nulu na pozici $(3, 2)$. To provedeme opět použitím Householderova zrcadlení pro druhý sloupec, které převede vektor $\mathbf{x}_2 = [0, 0, -3]$ na vektor \mathbf{e}_2

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ H_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ A_2 = H_2 A_1 = H_2 H_1 A &= \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = H_2 H_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Povšimněme si, že pro druhou transformaci jsme použili vektor \mathbf{x}_2 a ne $\mathbf{s}_2(A_1)$. Vektory se liší pouze v prvním čísle a čtenář si odpoví na otázku, proč jsme to udělali. \square

Listing 9: matrix_factorization_test.m

```

1 n = 30; m = 20;
2 % QR test
3 A = rand(m,n);
4 [R,Q] = householder(A,'qr');
5 disp(num2str(norm(A-Q*R)/norm(A)));
6 % tridiagonalization test
7 A = rand(n); A = (A+A')/2;
8 [T,P] = householder(A,'tridiag');
9 disp(num2str(norm(A-P*T*P')/norm(A)));
10 % SVD test
11 A = rand(m,n);
12 [T,P1,P2] = householder(A,'bidiag');
13 disp(num2str(norm(A-P1*T*P2)/norm(A)));

```

Listing 10: householder.m

```

1 function [A,P,P2] = householder(A,type)
2 m = size(A,1); n = size(A,2); mn = min([m n]);
3 P = eye(m);
4 P2 = [];
5 if nargin<2, type='qr'; end % type ... {'qr','tridiag','bidiag'}
6 switch type
7     case 'qr'
8         for iii=1:mn-1
9             x = zeros(m,1); normxe = zeros(m,1);
10            x(iii:end,1) = A(iii:end,iii);
11            normxe(iii,1) = norm(x);
12            u = x - normxe;
13            w = u/norm(u);
14            P_ = eye(m)-2*w*(w'); P = P*P_; A = P_*A;
15        end
16     case 'tridiag'
17         for iii=1:mn-1
18             alpha = -sign(A(iii+1,iii))*sqrt(sum(A(iii+1:end,iii).^2));
19             r = sqrt((1/2)*alpha*(alpha-A(iii+1,iii))); w = zeros(m,1);
20             w(iii+1) = (A(iii+1,iii)-alpha)/(2*r);
21             w(iii+2:end) = (A(iii+2:end,iii))/(2*r);
22             P_ = eye(m)-2*w*(w'); P = P*P_; A = P_*A*P_;
23        end
24     case 'bidiag'
25         P2 = eye(n);
26         for iii=1:mn-1
27             % row operations
28             x = zeros(m,1); normxe = zeros(m,1);
29             x(iii:end,1) = A(iii:end,iii); normxe(iii,1) = norm(x);
30             u = x - normxe; w = u/norm(u);
31             P_ = eye(m)-2*w*(w'); P = P*P_; A = P_*A;
32             % column operations
33             alpha = -sign(A(iii,iii+1))*sqrt(sum(A(iii,iii+1:end).^2));
34             r = sqrt((1/2)*alpha*(alpha-A(iii,iii+1))); w = zeros(n,1);
35             w(iii+1) = (A(iii,iii+1)-alpha)/(2*r);
36             w(iii+2:end) = (A(iii,iii+2:end))/(2*r);
37             P2_ = eye(n)-2*w*(w'); P2=P2_*P2; A = A*P2_;
38        end
39     otherwise
40         error('householder(A,opt) ... opt: ''qr'' or ''tridiag'' or ''bidiag''');
41 end

```


3.1.2 Givensova rotační matice

Givensova rotační transformace transformuje dvojici řádků (násobení Givensovou transformační maticí zleva), respektive sloupců (násobení zprava) tak, že na ní provede 2D rotaci o nějaký úhel α

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_j(\mathbf{A}) \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_j(\mathbf{A}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) - \sin(\alpha)\mathbf{r}_j(\mathbf{A}) \\ \sin(\alpha)\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) + \cos(\alpha)\mathbf{r}_j(\mathbf{A}) \end{bmatrix}$$

Lehce odvodíme, že Givensova matice

$$\mathbf{G}_{(i,j,\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \text{ kde } c = \cos(\alpha), s = \sin(\alpha),$$

vznikne z jednotkové matice \mathbf{I} tak, že 2×2 podmatice $\mathbf{I}_{(\{i,j\},\{i,j\})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nahradíme maticí $\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ rovinné rotace ve 2D o úhel α (proti směru hodinových ručiček). O Givensově rotační matici můžeme snadno ukázat, že

- Matice $\mathbf{M} = \mathbf{G}_{(i,j,\alpha)}\mathbf{A}$ se liší od matice \mathbf{A} pouze v řádcích i a j .
- Matice $\mathbf{G}_{(i,j,\alpha)}$ je ortonormální

V drtivé většině případů bude úhel α volen tak, aby rotační transformace převedla nějakou dvojici $[a, b]^T$ na vektor $[r, 0]^T$, kde $r = \|[a, b]^T\|$. Posloupností takovýchto úprav pak lze nulovat některé pozice v upravované matici. Zdrojový MatLabovský Kód 11, který pro vstupní dvojici a, b vrací trojici c, s, r je převzat z wikipedie.

Listing 11: givens_rotationx.m

```

1 function [c,s,r] = givens_rotation(a, b)
2 if b == 0;
3     c = sign(a);    s = 0;        r = abs(a);
4     if(c == 0);    c = 1.0;    end %MatLab's sign function returns 0 on input 0.
5 elseif a == 0;
6     c = 0;          s = sign(b);  r = abs(b);
7 elseif abs(a) > abs(b);
8     t = b/a;
9     u = sign(a)*abs(sqrt(1+t*t));
10    c = 1/u;        s = c*t;      r = a*u;
11 else
12    t = a/b;
13    u = sign(b)*abs(sqrt(1+t*t));
14    s = 1/u;        c = s*t;      r = b*u;
15 end;
```

Příklad 15. Najděte ortonormální matici \mathbf{G} takovou, že převede matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

z příkladu 14 na horní trojúhelníkovou. Jelikož příklad nelze zkonstruovat tak, aby vycházela „pěkná“ čísla, výpočet naznačte symbolicky.

Řešení. Nejprve najdeme matici G_1 Givensovy rotace, která znuluje číslo na pozici $(3, 1)$. Využijeme pro druhý a třetí řádek (ale mohli bychom využít i první a třetí), tedy rotujeme $[-1 \ 2]^T$ na $[r_1 \ 0]^T$, $r_1 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

$$A_2 = G_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ \sqrt{5} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\sqrt{5} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \frac{-1}{r_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad s_1 = -\frac{2}{r_1} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Dále znuluje číslo na pozici $(2, 1)$ pomocí prvního řádku. Zde rotujeme $[2 \ -\sqrt{5}]^T$ na $[r_2 \ 0]^T$, $r_2 = \sqrt{(2)^2 + (-\sqrt{5})^2} = 3$

$$A_3 = G_2 A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ \sqrt{5} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\sqrt{5} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{5}} & -\frac{5}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \frac{2}{r_2} = \frac{2}{3}, \quad s_2 = -\frac{\sqrt{5}}{r_2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Zbývá znulovat číslo na pozici $(3, 2)$ a to pouze pomocí druhého řádku (proč?). Zde rotujeme $[\frac{6}{\sqrt{5}} \ \frac{3}{\sqrt{5}}]^T$ na $[r_3 \ 0]^T$, $r_3 = \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2} = 3$

$$A_3 = G_3 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -s_3 \\ 0 & s_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{5}} & -\frac{5}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{r_3} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad s_3 = -\frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{r_3} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Tedy

$$A_3 = GA = G_3 G_2 G_1 A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = G_3 G_2 G_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

□

Student si odpoví na několik následujících otázek k příkladu 15

- Kdybychom chtěli nyní pomocí Givensovy rotace znulovat číslo na pozici $(1, 3)$, zůstaly by nuly pod diagonálou zachovány?
- Pokud bychom měli matici $n \times n$, kolik úprav bychom potřebovali pro úpravu na horní trojúhelníkový tvar pomocí
 - sekvence matic Householderova zrcadlení
 - sekvence matic Givensovy rotace
- Jistě jste zjistili, že sekvence je při použití Givensových rotací delší. Jak to ale bude z hlediska počtu násobení reálných čísel?

3.2 Bidiagonalizace, tridiagonalizace

V kapitole 1 jsme si připoměli, jak se mění matice bilineárních a kvadratických forem při změně bází. Kdybychom uměli najít báze takové, ve kterých bude matice diagonální, bude se nám s ní dobře pracovat. Omezíme se navíc jen na báze ortonormální. V této podkapitole se zaměříme na první mezikrok

ke kýženému diagonálnímu tvaru.

$$\mathbb{R}^{m \times n} \ni A \Rightarrow \text{najdi } A = UB V^T \text{ kde } U = U^T, V = V^T \text{ a } B \text{ je bidiagonální}$$

$$A^T = A \Rightarrow \text{najdi } A = UTU^T \text{ kde } U = U^T \text{ a } T \text{ je tridiagonální}$$

S bi- a tri- diagonálními maticemi se sice nepracuje tak snadno jako s diagonálními, řešení soustav je ale mnohem jednodušší (+rychlejší) a převedení matice do bi- a tri- diagonálních tvarů je poměrně snadné.

3.2.1 Ortonormální převod symetrické matice na tridiagonální tvar

Mějme symetrickou matici A , kterou chceme postupně po sloupcích a řádcích převést na tridiagonální tvar pomocí ortonormálních transformací. V následujícím schématu značíme \times libovolnou hodnotu, která nemusí být nutně nula.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} a_1 & b_1 & & & & & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & & & & & \\ & \ddots & & x_i & & & & \\ \hline & & x_{i+1} & \times & \times & \cdots & \times & \\ & & x_{i+2} & \times & \times & \cdots & \times & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & x_n & \times & \times & \cdots & \times & \end{array} \right] = A \rightarrow \text{HAH} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} a_1 & b_1 & & & & & & \\ b_1 & \ddots & \ddots & & & & & \\ & \ddots & & a_i & b_i & & & \\ \hline & & & b_i & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \times & \times & \cdots & \times \end{array} \right]$$

Tohoto lze z matice

$$A = \left[\begin{array}{c|c} T_i & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & x_{i+1} \quad A_i \end{array} \right]$$

docílit pomocí Householderovy matice $H = H^T$ ve tvaru

$$H = \left[\begin{array}{c|c} I_i & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & H_i \end{array} \right], \quad H_i x_{i+1} = \begin{bmatrix} b_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

jelikož $a_i = x_i$ a

$$\begin{aligned} \text{HAH} &= \left[\begin{array}{c|c} I_i & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & H_i \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} T_i & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & x_{i+1} \quad A_i \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I_i & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & H_i \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} T_i & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & b_i \quad \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I_i & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & H_i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T_i & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & b_i \quad \mathbf{0}^T \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Kód pro tridiagonalizaci je

Listing 12: givens_rotationx.m

```

1 function [c,s,r] = givens_rotation(a, b)
2 if b == 0;
3     c = sign(a);    s = 0;        r = abs(a);
4     if(c == 0);    c = 1.0;    end %MatLab's sign function returns 0 on input 0.
5 elseif a == 0;

```

```

6   c = 0;          s = sign(b);   r = abs(b);
7   elseif abs(a) > abs(b);
8     t = b/a;
9     u = sign(a)*abs(sqrt(1+t*t));
10  c = 1/u;        s = c*t;       r = a*u;
11  else
12    t = a/b;
13    u = sign(b)*abs(sqrt(1+t*t));
14    s = 1/u;      c = s*t;       r = b*u;
15  end;

```

3.2.2 Ortonormální převod matice na bidiagonální tvar

Pokud chceme rozložit nesymetrickou matici, nevystačíme si s jednou ortonormální maticí, ale budeme potřebovat dvě. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $m \leq n$. Převod na bidiagonální tvar je založen na podobném schématu jako v předchozí podkapitole

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} a_1 & b_1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & x_i & \times & \times & \cdots & \times \\ \hline & & & x_{i+1} & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & x_{i+2} & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & x_n & \times & \times & \cdots & \times \end{array} \right] = A \rightarrow H_l A H_r = \left[\begin{array}{cc|cccc} a_1 & b_1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & a_i & b_i & & & \\ \hline & & & & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \times & \times & \cdots & \times \end{array} \right]$$

což lze blokově zapsat

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} B_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0}^\top & b_{i-1} & x_i & \mathbf{y}_{i+1}^\top \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{x}_{i+1} & A_i & \end{array} \right]$$

Pomocí násobení zleva Householderovou maticí $H_l = H_l^\top$ ve tvaru

$$H = \left[\begin{array}{c|c} l_{i-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & H_{l,i} \end{array} \right], \quad H_{l,i} \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = H_{l,i} \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} a_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

obdržíme

$$H_l A = \left[\begin{array}{cc|cccc} a_1 & b_1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & a_i & y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_n \\ \hline & & & & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \times & \times & \cdots & \times \end{array} \right].$$

Vynásobením zprava druhou Householderovou maticí $H_r = H_r^\top$ ve tvaru

$$H_r = \left[\begin{array}{c|c} l_i & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & H_{r,i} \end{array} \right], \quad = [y_{i+1} \ \cdots \ y_n] H_{r,i} = \mathbf{y}_{i+1} H_{r,i} = [b_{i+1} \ \mathbf{0}^\top]$$

obdržíme

$$H_l A H_r = \left[\begin{array}{cc|cccc} a_1 & b_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & a_i & b_i & & \\ \hline & & & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & \times & \times & \cdots & \times \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \times & \times & \cdots & \times \end{array} \right].$$

3.3 QR rozklad

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je libovolná matice. Pak existují ortonormální matice $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a horní trojúhelníková matice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ takové, že

$$A = QR.$$

Analogicky bychom mohli definovat rozklady $A = QL$, $A = RQ$ a $A = LQ$ kde L je dolní trojúhelníková matice. Jak takový rozklad spočítat? Lze použít Grammova-Schmidtova ortonormalizačního algoritmu, Givensových rotací (ty probereme později), nebo Householderových zrcadlení, které si zde popíšeme.

Položme si otázku, jak získat rozklad matice $A = QR$. Výše jsme si ukázali jeden ze způsobů jak utvořit ortonormální matici P . Součin ortogonálních matic $P = P_n \cdots P_2 P_1$ je ortonormální matice. Co kdybychom volili matice P_i tak, aby postupně převedli matici A na horní trojúhelníkovou matici R ? Ideální by bylo, aby měla matice $P_1 A$ v prvním sloupci nuly pod hlavní diagonálou, matice $P_2 P_1 A$ by měla nuly pod diagonálou v prvním a druhém sloupci, a tak dále. Toho lze docílit sekvencí Householderových, či Givensových transformačních matic, existují však také efektivnější metody. Tělo QR faktorizace pomocí Householderových transformací je uvedeno v Kódu 10 a testováno souborem 9.

3.4 Spektrální rozklad

V úvodním kurzu lineární algebry byla tato kapitola probrána a zabývala se od začátku symetrickými maticemi. Zde tuto látku na začátku maličko zobecníme o několik poznatků pro nesymetrické matice, hlavně však na konci probereme jeden ze způsobů, jak získat spektrální rozklad numericky.

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je čtvercová matice. Vektor \mathbf{v} nazveme vlastní vektor matice A právě tehdy když pro něj existuje skalár λ takový, že

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad \text{což je totéž jako } (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Geometricky to znamená, že vektory \mathbf{v} a $A\mathbf{v}$ jsou rovnoběžné. Dvojici (λ, \mathbf{v}) říkáme vlastní číslo a vlastní vektor matice A .

Matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s n lineárně nezávislými vlastními vektory lze zapsat ve tvaru

$$A = Q\Lambda Q^{-1},$$

kde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je matice, která vznikne zapsáním n normalizovaných vlastních vektorů postupně do sloupců a matice $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je diagonální a na její diagonále jsou postupně vlastní čísla matice A . Tomuto zápisu se říká vlastní rozklad matice A . Matice, které lze takto rozložit nazýváme diagonalizovatelné, některé diagonalizovat nejdou.

Příklad 16. Spočítejte vlastní rozklad matic

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Z definice spočteme vlastní čísla a vektory

- A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) \Rightarrow \lambda \in \{1, 3\}$$

$$\lambda_1 = 1: \mathbf{0} = (A - \lambda_1 I) \tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_1 \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} p \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_1}{\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3: \mathbf{0} = (A - \lambda_2 I) \tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_2 \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} p \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_2}{\|\tilde{\mathbf{v}}_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tedy

$$A = QDQ^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

- B:

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$\mathbf{0} = (A - \lambda I) \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} p$$

vidíme, že k dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda = 1$ lze v našem případě sestavit pouze jeden vlastní vektor $\mathbf{v} = [0 \ 1]^T$. Chybí nám druhý vlastní vektor k sestavení matice Q. Matice A není diagonalizovatelná. □

Příklad 17. Co jsou vlastní čísla a vektory matice A^n ?

Řešení. Z definice

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow A^n\mathbf{v} = A^{n-1}A\mathbf{v} = A^{n-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda A^{n-1}\mathbf{v} = \lambda A^{n-2}A\mathbf{v} = \lambda^2 A^{n-2}\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v},$$

což lze shrnout do závěru, že s mocninou A se vlastní vektory nemění, vlastní čísla se mění s mocninou. □

Dále se zabýváme některými vlastnostmi vlastního rozkladu

- Charakteristický polynom

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je determinant $|A - \lambda I|$ je polynomem n -tého řádu proměnné λ . Tento polynom nazýváme charakteristický polynom. Dle základní věty algebry jej lze rozvést ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$|A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = (-\lambda)^n + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) (-\lambda)^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^n \lambda_i. \quad (21)$$

- Invariantnost vzhledem k podobnosti matic

Nechť (λ, \mathbf{v}) je vlastní dvojice matice A, tedy $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Pro jakoukoli matici B podobnou matici A, tedy $B = TAT^{-1}$, platí

$$BT\mathbf{v} = TAT^{-1}T\mathbf{v} = TA\mathbf{v} = \lambda T\mathbf{v}.$$

Platí tedy, že podobné matice mají stejná vlastní čísla. Navíc mají podobné matice také stejný charakteristický polynom, jelikož

$$|TAT^{-1} - \lambda I| = |TAT^{-1} - \lambda TTT^{-1}| = |T(A - \lambda I)T^{-1}| = |T| |A - \lambda I| |T^{-1}| = |A - \lambda I|.$$

- Součin vlastních čísel matice

Dosažením $\lambda = 0$ do charakteristického polynomu (21) dostaneme, že determinant A je roven součinnu vlastních čísel.

- Součet vlastních čísel matice

Charakteristický polynom lze také s využitím rozvoje determinantu podle řádku zapsat ve tvaru

$$|A - \lambda I| = \prod_{i=1}^n (A_{ii} - \lambda) + p_{n-2}(\lambda) = p_{n-2}^*(\lambda) + \left(\sum_{i=1}^n A_{ii}\right)(-\lambda)^{n-1} + (-\lambda)^n.$$

Porovnáním koeficientů u $(-\lambda)^{n-1}$ s rozvojem (21) plyne, že $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n A_{ii}$.

Dále se budeme zabývat případem, kdy je matice A reálná a symetrická. V tomto případě jsou vlastní čísla reálná, vlastní vektory příslušné vlastním číslům jsou ortogonální a vlastní vektory příslušné vícenásobnému vlastnímu číslu leží tvoří podprostor dimenze rovné této násobnosti. Vlastní vektory lze tedy zvolit ortonormální a z vlastního rozkladu matice se stane spektrální rozklad matice

$$A = QDQ^T.$$

3.5 Singulární rozklad (SVD)

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je libovolná matice. Pak existují ortonormální matice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonální matice $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$, na jejíž diagonále jsou vlastní čísla matice

$$\sqrt{A^*A} \text{ pro } m \geq n$$

$$\sqrt{AA^*} \text{ pro } m < n$$

takové, že

$$A = USV^T.$$

Tomuto rozkladu říkáme singulární rozklad. Čísla na diagonále matice S se nazývají singulární čísla matice A .

- standadní verze (full SVD)

$$A = \begin{matrix} U & S & V^T \\ m \times n & m \times m \times n \times n & n \times n \end{matrix}$$

v MatLabu: `[U,S,V]=svd(A)`

- redukováná verze (reduced SVD)

$$A = \begin{cases} U & S & V^* & m > n \\ m \times n \times n \times n \times n & & & \\ U & S & V^* & m < n \\ m \times m \times m \times m \times n & & & \end{cases}$$

v MatLabu: `[U,S,V]=svd(A,'econ')`

- pro řídké matice v Matlabu (aproximace hodnoti q): `[U,S,V]=svds(A,q)`
- Aproximace matice maticí nižší hodnoti (low rank approximation). Necht' $h(A) = r$ pak

$$A = \sum_{i=1}^r A_i = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*$$

Zkrácením této sumy z r na q členů dostaneme matici

$$\hat{A}_q = \sum_{i=1}^q \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*$$

pro kterou platí

$$\|A - \hat{A}_q\|_2 = \sigma_{q+1} \quad \text{kde } \|M\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} = \|M\|_F$$

Příklad 18. Spočítejte singulární rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{a } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Z definice spočteme vlastní čísla a vektory

- A: Chceme najít vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ a kladná čísla σ_1 a σ_2 taková, že $A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, tedy

$$AV = US \quad \Leftrightarrow \quad A = USV^*.$$

Místo hledání trojice U, S, V budeme hledat pouze dvojici S, V :

$$A^T A = VS^T U^T USV^T = VS^2 V^T = V \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2) V^T$$

Tedy

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{bmatrix} \\ 0 &= \begin{vmatrix} 25 - \lambda & 7 \\ 7 & 25 - \lambda \end{vmatrix} = (25 - \lambda)^2 - 49 = \lambda^2 - 50\lambda + 576 = (\lambda - 32)(\lambda - 18) \\ \begin{bmatrix} 25 - 32 & 7 \\ 7 & 25 - 32 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 25 - 18 & 7 \\ 7 & 25 - 18 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} AV &= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = US \\ U &= AVS^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4^{-1} & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = USV^* \end{aligned}$$

- B : Tedy

$$B^T B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = (\lambda - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \frac{3-\sqrt{5}}{2})$$

$$\begin{bmatrix} 2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & -1-\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & -1+\sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$BV = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} -2 & 1-\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} -2 & 1-\sqrt{5} \\ -1-\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$= U \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix} = US$$

$$U = BVS^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} -2 & 1-\sqrt{5} \\ -1-\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{5}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}} \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} & \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2} & \frac{(1-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2} \\ -\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2} & \frac{(3-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10}} \begin{bmatrix} -\sqrt{5-\sqrt{5}} & -\sqrt{5+\sqrt{5}} \\ -\sqrt{5+\sqrt{5}} & \sqrt{5-\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$B = USV^* = \sqrt{\frac{1}{10}} \begin{bmatrix} -\sqrt{5-\sqrt{5}} & -\sqrt{5+\sqrt{5}} \\ -\sqrt{5+\sqrt{5}} & \sqrt{5-\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} -2 & 1-\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}$$

Je vidět, že tento na první pohled jednoduchý příklad je při všem tom počítání s odmocninami početně náročný.

□

Příklad 19. Spočítejte spektrální a singulární rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Z definice spočteme vlastní čísla a vektory

- Pro spektrální rozklad utvoříme charakteristický polynom a vypočteme vlastní čísla

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (5 - \lambda)^2 - (-4)^2, \Rightarrow |5 - \lambda| = 4, \Rightarrow \lambda \in \{1, 9\}$$

zbývají určit vlastní vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \Rightarrow \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} &= (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 & \Rightarrow \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\top = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pro singulární rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^\top$ matice \mathbf{A} spočítáme jednu z matic \mathbf{AA}^\top , nebo $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ a provedeme její spektrální rozklad. V našem případě je to jedno, protože máme symetrickou matici

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix}, \det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = (41 - \lambda)^2 - 40^2, \Rightarrow |41 - \lambda| = 40, \Rightarrow \lambda \in \{1, 81\}$$

vlastní vektory matice \mathbf{M} jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 40 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \Rightarrow \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} &= (\mathbf{M} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -40 & 40 \\ 40 & -40 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 & \Rightarrow \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zatím jsme spočítali

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = (\mathbf{USV}^\top)^\top (\mathbf{USV}^\top) = \mathbf{VS}^2 \mathbf{V}^\top = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \end{bmatrix}$$

tedy známe

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a zbývá určit \mathbf{U} . Z rovnosti $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^\top$ víme, že

$$\mathbf{AV} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

||

$$\mathbf{US} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{tedy } \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ a}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}^\top.$$

Pozorný čtenář si jistě všiml, že singulární rozklad vyšel stejně jako spektrální. Hloubavý čtenář si jistě položil otázku, zda je tomu vždy, když se jedná o singulární rozklad symetrické matice. A čtenář, který není lenoch, si na tuto otázku jistě správně odpoví.

□

Jak spočítat SVD rozklad?

3.6 Využití spektrálního rozkladu v informatice

3.6.1 Low rank approximation

Mějme jakoukoli matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a její SVD rozklad $A = USV^T = \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i s_i \mathbf{v}_i^T$, $p = \text{rank} A$. Připomeňme, že Frobeniova norma matice je

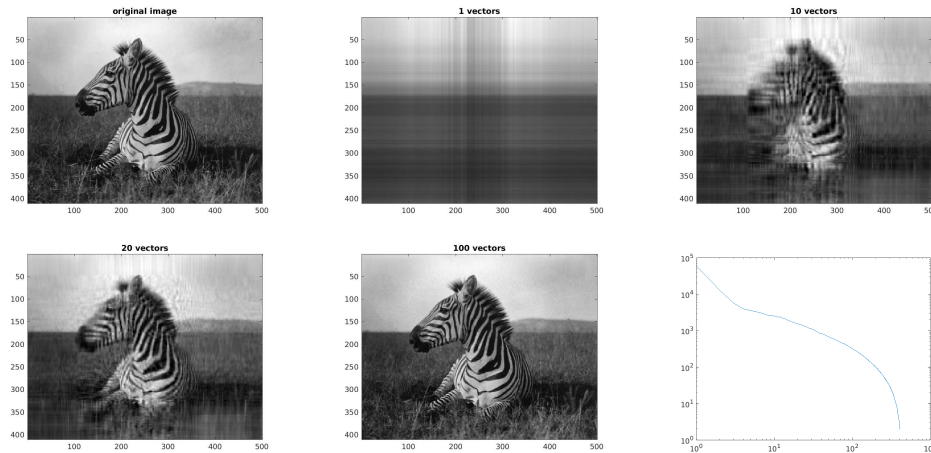
$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Lze dokázat, že pro neúplný SVD rozklad matice ($k < p$) platí

$$\|A - A_k\|_F = \left\| A - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i s_i \mathbf{v}_i^T \right\|_F = \min_{\substack{M \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \text{rank } M = k}} \|A - M\|_F,$$

tedy že k -rank SVD rozklad A_k matice A je ze všech $m \times n$ matic M hodnosti k nejbližší matici A ve Frobeniově normě.

Mějme například obrázek ve stupních šedi, který můžeme chápat jako matici s hodnotami mezi 0 a 255. Jak se bude lišit původní matice od k rank aproximace můžeme zjistit po spuštění Kódu 13. Na Obrázku 9 vidíme originální obrázek a jeho low rank aproximace pro $k \in \{1, 10, 20, 100\}$ a rozložení singulárních čísel v log-log škále.



Obrázek 9: Low rank approximation obrázku

Listing 13: svdpicture.m

```

1 name = {'zebra.jpg', 'ice_and_pylons.jpg', 'weight.jpg', 'trees.jpg'};
2 A_ = imread(name{4});
3 A = (double(A_(:, :, 1)) + double(A_(:, :, 2)) + double(A_(:, :, 3))) / 3;
4 for iii=1:3, A_(:, :, iii) = uint8(A); end; image(A_);
5 [U,S,V]=svd(A);
6 for n = 1:200
7     AA = U(:, 1:n)*S(1:n, 1:n)*(V(:, 1:n)');
8     for iii=1:3, A_(:, :, iii) = uint8(AA); end; image(A_);
9     title([num2str(n), ' vectors']);
10    pause(0.2);
11 end

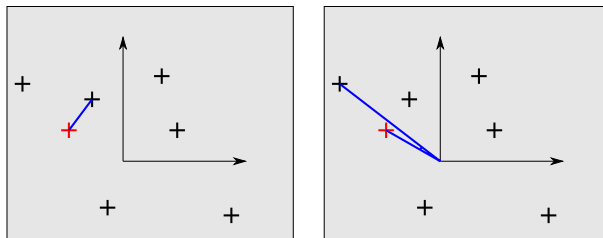
```

3.6.2 MNIST (Latent semantic analysis, ...)

Už víme, že pomocí SVD umíme nahradit (nepřesně) nějakou matici její SVD aproximací. To nám může pomoci, pokud potřebujeme touto maticí mnohokrát násobit a nepotřebujeme počítat úplně přesně. Musíme si ale uvědomit, že výpočet SVD je poměrně náročný a pro komprimaci/dekomprimaci dat používáme efektivnější algoritmy. Často ale potřebujeme na základě nějaké „učící“ datové sady vymyslet kritérium, které pak bude uplatňováno mnohokrátě poté na „testovacích“ datech. Nabízí se nám celá paleta algoritmů, které lze využít a my si zde probereme několik variant, jak lze uplatnit SVD.

Na stránce k MNIST databázi (odkaz v závěru kapitoly) nabízejí autoři ke stažení databázi 60 tisíc naskanovaných 28×28 pixelových obrázků cifer 0-9. Tato „učící“ databáze nám bude sloužit k vytvoření klasifikačního kritéria. Pomocí vytvořeného kritéria budeme mít za úkol přiřadit jakémukoli nově obdrženému obrázku cifru 0-9. Pro tyto účely máme k dispozici druhou „testovací“ databázi, čítající dalších 10 tisíc obrázků. Autoři dále na své stránce srovnávají cca klasifikačních 30 algoritmů ze sedmi skupin matematických přístupů. Naší metou nebude konkurovat těm nejlepším, ale vytvořit vůbec nějaké jakž-takž fungující kritérium.

Jak vlastně doposud umíme měřit „odlišnost“, či „příbuznost“? Ve vektorových prostorech (se skalárním součinem) umíme měřit vzdálenosti a úhly. Na Obrázku 10 vidíme červený bod v \mathbb{R}^2 k němuž máme za úkol najít „nejbližší“ bod ze šesti černých bodů. Je patrné, že výsledný kandidát závisí na zvoleném způsobu měření. Z tohoto obrázku nelze říci, které kritérium je lepší. To bude záviset na úspěšnosti našeho klasifikačního algoritmu na testovacích datech.



Obrázek 10: Měření – vzdálenost vs úhel

Každý z „učících“ obrázků převedeme do vektoru. V našem případě to provedeme prostým seřazením sloupců pod sebe, ale jistě vás napadne několik jiných způsobů (které mohou být možná i vhodnější). Vznikne tak matice $A \in \mathbb{R}^{u \times p}$, kde u je počet „učících“ obrázků a p je počet pixelů v jednom obrázku. Připomínáme, že všechny obrázky mají stejnou velikost, tedy jdou coby řádkové vektory uspořádat do matice.

Pokud nejsme omezeni počítačovým výkonem, můžeme porovnávat každý testovací obrázek s každým učícím (těch je 60 tisíc) a například vybrat 20 nejblížešších a na základě jejich klasifikace rozhodnout, co daná testovací cifra znamená. „Blížkost“ určíme na základě (viz Kód 14)

- nejmenší délky (28^2 odčítání a mocnění na druhou, $28^2 - 1$ sčítání a jedno odmocnění)
- nejmenšího úhlu (28^2 násobení a jedno dělení)

To je poměrně dost operací, vezmeme-li v úvahu, že budeme testovat každý testovací obrázek s každým učícím. Zkusme výpočetní náročnost redukovat pomocí SVD.

Pokud nahradíme matici A její k rank aproximací A_k , lze urychlit řazení podle nejmenšího úhlu. Vidíme

$$\begin{bmatrix} (A_{1,:}, \mathbf{q}) \\ \vdots \\ (A_{n,:}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} = A\mathbf{q} \equiv A_k\mathbf{q} = U_k S_k V_k^\top \mathbf{q},$$

že sice místo jednoho násobení matice-vektor musíme násobit třikrát, ale místo $60000 \cdot 28^2$ násobení potřebujeme na jen $28^2 \cdot k + k + k \cdot 60000$ násobení. Pro $k = 20$ tak získáme více než 30-ti násobné urychlení. S jakými obrázky pracujeme místo původních, lze nahlédnout z Obrázku 11 srovnáním prvního a předposledního obrázku. Pomocí takového přístupu ale nemůžeme nijak urychlit porovnání na nejmenší délku.

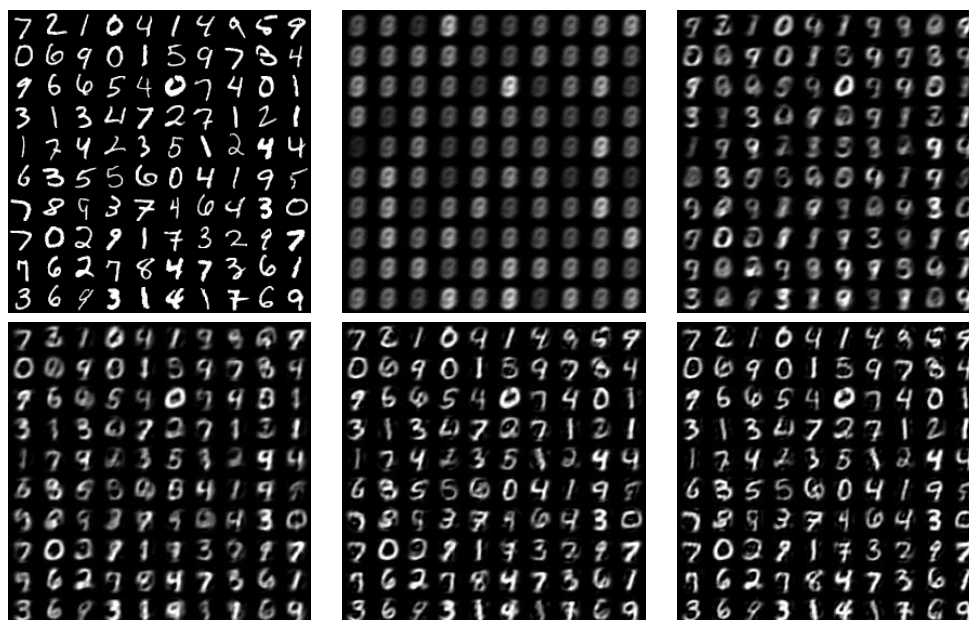
Zde ale přichází na řadu empirická zkušenost. Podívejme se na to, jak jednotlivým učicím obrázkům – řádkům matice A přiřazujeme příslušné řádky matice U . Děje se tak na základě rovnosti

$$[U_k]_{i,:} = [A_k]_{i,:} V_k S_k^{-1}.$$

Tímto však lze definovat zobrazení

$$\mathbb{R}^{784} \rightarrow \mathbb{R}^k \quad \mathbf{q}^\top \rightarrow \mathbf{q}^\top V_k S_k^{-1},$$

a pomocí vzdáleností, nebo úhlů porovnávat v \mathbb{R}^k namísto v \mathbb{R}^{784} .



Obrázek 11: MNIST – k rank aproximace obrázků (orig, $k \in \{1, 5, 10, 20, 30\}$)

Listing 14: mnistread.py.m

```

1 import numpy as np
2 from PIL import Image
3
4 def read_idx_file(fileName):
5     with open(fileName, "rb") as file:
6         magic = np.fromfile(file, dtype=np.uint8, count=4)
7         if (magic[0] != 0 or magic[1] != 0):
8             return None
9         dtype = magic[2]
10        if (dtype == 0x08): dtype = np.uint8
11        else:
12            if (dtype == 0x09): dtype = np.int8
13            else:

```

```

14         if (dtype == 0x0B): dtype = np.int16
15         else:
16             if (dtype == 0x0C): dtype = np.int32
17             else:
18                 if (dtype == 0x0D): dtype = np.float
19                 else:
20                     if (dtype == 0x0E): dtype = np.double
21         dim_count = int(magic[3])
22         dims = []
23         bytes = np.fromfile(file, dtype='>i4', count=dim_count)
24         dims = list(bytes)
25         item_count = 1
26         for x in dims:
27             item_count *= x
28         items = np.fromfile(file, dtype=dtype, count=item_count)
29         data = np.reshape(items, tuple(dims), order='C')
30         return data
31
32
33 def make_image_matrix(rows, cols, images, fileName):
34     img_height = images.shape[1]
35     img_width = images.shape[2]
36     mat_width = cols * img_width
37     mat_height = rows * img_height
38     matrix = Image.new('L', (mat_width, mat_height))
39     for row in range(rows):
40         for col in range(cols):
41             idx = row * cols + col
42             data = images[idx].astype(np.int32)
43             img = Image.fromarray(data, mode='I')
44             matrix.paste(img, box=(col * img_width, row * img_height))
45     matrix.save(fileName)
46
47 def make_image_result(results, query_images, dataset_images, fileName):
48     img_height = query_images.shape[1]
49     img_width = query_images.shape[2]
50     cols = len(results[0][1]) + 2
51     rows = len(results)
52     mat_width = cols * img_width
53     mat_height = rows * img_height
54     matrix = Image.new('L', (mat_width, mat_height))
55     for row, result in enumerate(results):
56         data = query_images[result[0]].astype(np.int32)
57         img = Image.fromarray(data, mode='I')
58         matrix.paste(img, box=(0, row * img_height))
59         for col in range(2, cols, 1):
60             idx = result[1][col - 2]
61             data = dataset_images[idx].astype(np.int32)
62             img = Image.fromarray(data, mode='I')
63             matrix.paste(img, box=(col * img_width, row * img_height))
64     matrix.save(fileName)
65
66 indices__testing = read_idx_file("t10k-labels.idx1-ubyte")
67 indices_learning = read_idx_file("t10k-labels.idx3-ubyte")
68 images__testing = read_idx_file("t10k-images.idx3-ubyte")
69 images_learning = read_idx_file("train-images.idx3-ubyte")
70
71
72 data__testing = np.reshape(images__testing, (images__testing.shape[0], images__testing
73     .shape[1] * images__testing.shape[2]), order='C')
74 data_learning = np.reshape(images_learning, (images_learning.shape[0], images_learning
75     .shape[1] * images_learning.shape[2]), order='C')

```

```

74
75 A = data_learning.astype(np.float32)
76 T = data__testing.astype(np.float32)
77
78 Anorm = np.sqrt(np.sum(A*A, axis=1))
79
80 u, s, vt = np.linalg.svd(A, full_matrices=False) # reduced SVD
81 unorm = np.sqrt(np.sum(u*u, axis=1))
82
83 rank = 20 # low rank approximation
84 u = u[:,0:rank]
85 s = s[0:rank]
86 vt = vt[0:rank,:]
87 v = vt.transpose()
88 sinv = 1.0/s
89
90 result_count = 25
91 query_count = 20
92
93 alg = 'ss'
94 results_d = [] # distance
95 results_ds = [] # distance SVD
96 results_a = [] # angle
97 results_as = [] # angle SVD
98
99 for q_id, q in enumerate(T[0:query_count,:]):
100     ## distance
101     meas = np.zeros(A.shape[0])
102     for i in range(0,A.shape[0]):
103         meas[i] = np.linalg.norm(A[i,:]-q)
104     idx = np.argsort(meas)[:result_count]
105     results_d.append((q_id, idx))
106     ## angle
107     meas = np.dot(A, q) / Anorm
108     idx = np.argsort(meas)[-result_count:]
109     results_a.append((q_id, idx))
110     ## distance on image functions
111     qq = np.dot(q,v) * sinv
112     meas = np.zeros(u.shape[0])
113     for i in range(0, u.shape[0]):
114         meas[i] = np.linalg.norm(u[i, :] - qq)
115     idx = np.argsort(meas)[:result_count]
116     results_ds.append((q_id, idx))
117     ## angle on image functions
118     meas = np.dot(u, qq) / unorm
119     idx = np.argsort(meas)[-result_count:]
120     results_as.append((q_id, idx))
121
122 make_image_result(results_d , images__testing , images_learning , "results_distance.png"
)
123 make_image_result(results_a , images__testing , images_learning , "results_angle.png")
124 make_image_result(results_ds , images__testing , images_learning , "results_svd_distance.
png")
125 make_image_result(results_as , images__testing , images_learning , "results_svd_angle.png
")

```

Odkazy ke kapitole

- Aleksandar Donev: Numerical Methods I, Singular Value Decomposition
<http://cims.nyu.edu/~donev/Teaching/NMI-Fall2010/Lecture5.handout.pdf>

- Jim Lambers: The SVD algorithm
<http://web.stanford.edu/class/cme335/lecture6.pdf>
- Hua Zhou: Eigen-decomposition and SVD
<http://hua-zhou.github.io/teaching/biostatm280-2017spring/slides/16-eigsvd/eigsvd.html>
- YannLeCun, Corinna Cortes, Christopher J.C. Burges: The MNIST database of handwritten digits
<http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>

4 Kvadratické programování

4.1 Opakování z diferenciálního počtu funkcí více proměnných

Doporučujeme prostudovat [6]. Mějme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Parciální derivace funkce f podle proměnné x_i je definována jako

$$(\partial_{x_i} f)(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

Gradient funkce f je definován jako

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{bmatrix}(\mathbf{a}).$$

Příklad 20. Spočítejte gradient funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b},$$

kde \mathbf{A} je symetrická matice.

Řešení. Spočtěme si nejdříve parciální derivaci podle i -té proměnné. Pro tento účel rozepíšeme f tak, aby i -tá proměnná nebyla nikde v sumě

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_k a_{k,l} x_l - \sum_{k=1}^n x_k b_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n x_k a_{k,l} x_l + \frac{1}{2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n x_i a_{i,l} x_l + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k a_{k,i} x_i + \frac{1}{2} x_i a_{i,i} x_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k b_k - x_i b_i \end{aligned}$$

pak zřejmě

$$\partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n a_{i,l} x_l + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{k,i} x_k + a_{i,i} x_i - b_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k - b_i = [\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}]_i$$

a tedy

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}.$$

□

4.2 Metoda sdružených gradientů

Inženýrské problémy často vedou na úlohy minimalizace celkové energie systému. Energii systému zpravidla lze popsat právě vícedimenzionální kvadratickou funkcí, tzv. kvadratického funkcionálu. Často tedy hledáme řešení úlohy minimalizace kvadratického funkcionálu (matice \mathbf{A} je pozitivně definitní). Proberme si nejprve jednodušší variantu, kdy k minimalizaci nedodáváme další omezující podmínky. Pro řešení úlohy

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b}$$

platí (jelikož je f hladká funkce)

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{A} \mathbf{x}^* - \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}.$$

Potřebujeme tedy řešit soustavu $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$, například Gaussovou eliminační metodou. Pokud je dimenze matice \mathbf{A} velká, je provedení Gaussovy eliminace výpočetně náročné. Uvedeme si metodu, která k výpočtu \mathbf{x}^* potřebuje pouze implementovanou funkci násobení maticí \mathbf{A} zleva. K tomu se ale dopracujeme postupnými krůčky.

Připomeňme si, že zobrazení $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{A}} := \mathbf{u}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{v}$ je skalární součin. Předpokládejme, že máme ortonormální bázi

$$(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n), \quad i \neq j \Rightarrow (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)_{\mathbf{A}} = 0, \quad (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i)_{\mathbf{A}} > 0$$

vzhledem k tomuto skalárnímu součinu. Když využijeme zápisu libovolného vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ v této bázi $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i$, lze minimizační úloha převést na

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i^* \mathbf{p}_i = \arg \min_{\sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n} f\left(\sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i\right) \\ &= \arg \min_{\tilde{\alpha}_i \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i\right)^{\top} \mathbf{A} \left(\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j \mathbf{p}_j\right) - \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i\right)^{\top} \mathbf{b} \\ &= \arg \min_{\tilde{\alpha}_i \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_i^2 \mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{A} \mathbf{p}_i - \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{b}\right) = \arg \min_{\tilde{\alpha}_1 \in \mathbb{R}} f(\tilde{\alpha}_1 \mathbf{p}_1) + \dots + \min_{\tilde{\alpha}_n \in \mathbb{R}} f(\tilde{\alpha}_n \mathbf{p}_n), \end{aligned}$$

čímž byl původní minimizační problém převeden na n nezávislých jednodimenzionálních kvadratických rovnic. Souřadnice řešení

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i^* \mathbf{p}_i, \quad 0 = \frac{df(\tilde{\alpha} \mathbf{p}_i)}{d\tilde{\alpha}} \Big|_{\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}_i^*} = \tilde{\alpha}_i^* \mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{A} \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\alpha}_i^* = \frac{\mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{b}}{\mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{A} \mathbf{p}_i}$$

v bázi $(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ můžeme spočítat paralelně, avšak pro každou souřadnici musíme spočítat $\mathbf{A} \mathbf{p}_i$, tedy násobení maticí. Pro velká n je tedy dopočtení přesného řešení \mathbf{x}^* příliš náročné. Omezme se na úlohu nalezení minima pouze na podmnožině

$$\mathbf{x}_k^{\bullet} \in \mathcal{S}_k = \{\mathbf{x}_0 + \tilde{\alpha}_1 \mathbf{p}_1 + \dots + \tilde{\alpha}_k \mathbf{p}_k\} = \mathbf{x}_0 + \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k \rangle \subset \mathbb{R}^n$$

tedy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k \tilde{\alpha}_i^{\bullet} \mathbf{p}_i = \arg \min_{\sum_{i=1}^k \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n} f\left(\mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i\right) \\ &= \arg \min_{\tilde{\alpha}_i \in \mathbb{R}} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_i^2 \mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{A} \mathbf{p}_i + \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{A} \mathbf{x}_0 - \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{b}\right) \\ &= \arg \min_{\tilde{\alpha}_i \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2} \tilde{\alpha}_i^2 \mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{A} \mathbf{p}_i - \tilde{\alpha}_i \mathbf{p}_i^{\top} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0)\right) \\ &= \arg f(\mathbf{x}_0) + \min_{\tilde{\alpha}_1 \in \mathbb{R}} f_0(\tilde{\alpha}_1 \mathbf{p}_1) + \dots + \min_{\tilde{\alpha}_k \in \mathbb{R}} f_0(\tilde{\alpha}_k \mathbf{p}_k), \end{aligned}$$

kde

$$f_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\top} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^{\top} \mathbf{g}_0$$

a proto

$$\mathbf{x}_k^{\bullet} = \sum_{i=1}^k \tilde{\alpha}_i^{\bullet} \mathbf{p}_i, \quad 0 = \frac{df_0(\tilde{\alpha} \mathbf{p}_i)}{d\tilde{\alpha}} \Big|_{\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}_i^{\bullet}} = \tilde{\alpha}_i^{\bullet} \mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{A} \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{g}_0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\alpha}_i^{\bullet} = -\frac{\mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{g}_0}{\mathbf{p}_i^{\top} \mathbf{A} \mathbf{p}_i}.$$

Všimněme si, že minimum na \mathcal{S}_k můžeme získat z minima na \mathcal{S}_{k-1} pouze dořešením jednodimenzi-
onální úlohy, protože

$$f(\mathbf{x}_k^\bullet) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}_k} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_{k-1}^\bullet) + \min_{\tilde{\alpha}_k \in \mathbb{R}} f_0(\tilde{\alpha}_k \mathbf{p}_k)$$

a můžeme se tedy pokusit generovat posloupnost \mathbf{x}_k^\bullet , $k = 1, \dots$ iterativně. Protože chceme,
aby zde uvedené vzorce korespondovaly s literaturou, přejdeme od koeficientů $\tilde{\alpha}$ k $\alpha = -\tilde{\alpha}$

$$\mathbf{x}_k^\bullet = \mathbf{x}_{k-1}^\bullet - \alpha_k \mathbf{p}_k, \quad \alpha_k = \frac{\mathbf{g}_0^\top \mathbf{p}_k}{\mathbf{p}_k^\top \mathbf{A} \mathbf{p}_k} = \frac{\mathbf{g}_{k-1}^\top \mathbf{p}_k}{\mathbf{p}_k^\top \mathbf{A} \mathbf{p}_k}$$

jelikož lze upravit

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{k-1}^\top \mathbf{p}_k &= (\mathbf{A} \mathbf{x}_{k-1}^\bullet - \mathbf{b})^\top \mathbf{p}_k = (\mathbf{A} (\mathbf{x}_{k-2}^\bullet - \alpha_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}) - \mathbf{b})^\top \mathbf{p}_k = (\mathbf{A} \mathbf{x}_{k-2}^\bullet - \mathbf{b})^\top \mathbf{p}_k - \alpha_{k-1} \overbrace{\mathbf{p}_{k-1}^\top \mathbf{A} \mathbf{p}_k}^{=0} \\ &= \mathbf{g}_{k-2}^\top \mathbf{p}_k = \dots = \mathbf{g}_0^\top \mathbf{p}_k. \end{aligned}$$

Zatím jsme si nic neříkali o vektorech \mathbf{p}_i , které bychom také chtěli generovat iterativně. Máme vek-
tory $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ a chtěli bychom vygenerovat nový \mathbf{p}_{k+1} . Vzpomeneme-li si na Grammův-Schmidtův
ortogonalizační proces (viz Příklad 10), tak pokud máme

$$\mathbf{h}_k \notin \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k \rangle, \quad \text{pak } \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{h}_k + \beta_{k1} \mathbf{p}_1 + \dots + \beta_{kk} \mathbf{p}_k, \quad \text{kde } \beta_{ki} = -\frac{\mathbf{p}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{h}_k}{\mathbf{p}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{p}_i},$$

protože

$$0 = \mathbf{p}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{h}_k + \beta_{k1} \mathbf{p}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{p}_1 + \dots + \beta_{kk} \mathbf{p}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{p}_k = \mathbf{p}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{h}_k + \beta_{ki} \mathbf{p}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{p}_i.$$

Takto bychom uchovávali všechny vektory $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$, a potřebovali vypočítat k skalárních součinů.
Pokud ale budeme postupovat chytře, lze obě tyto nevýhody eliminovat. Hledejme

$$\mathbf{x}_k^\bullet \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{H}_k, \quad \mathcal{H}_k = \langle \mathbf{g}_0, \mathbf{A} \mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{g}_0 \rangle.$$

Ukažme si, že gradient $\mathbf{g}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k^\bullet)$ v \mathbf{x}_k^\bullet je kolmý k prostoru \mathcal{H}_k , tedy

$$\mathbf{p}^\top \mathbf{g}_k = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{H}_k.$$

Jelikož jsme \mathbf{x}_k^\bullet zavedli jako $f(\mathbf{x}_k^\bullet) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{H}_k} f(\mathbf{x})$ tak pro všechna $\mathbf{d} \in \mathcal{H}_k$ platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k^\bullet)^\top \mathbf{A} \mathbf{x}_k^\bullet - (\mathbf{x}_k^\bullet)^\top \mathbf{b} &= f(\mathbf{x}_k^\bullet) \leq f(\mathbf{x}_k^\bullet + \varepsilon \mathbf{d}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k^\bullet + \varepsilon \mathbf{d})^\top \mathbf{A} (\mathbf{x}_k^\bullet + \varepsilon \mathbf{d}) - (\mathbf{x}_k^\bullet + \varepsilon \mathbf{d})^\top \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k^\bullet)^\top \mathbf{A} \mathbf{x}_k^\bullet + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{A} \mathbf{d} + \varepsilon \mathbf{d}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}_k^\bullet - (\mathbf{x}_k^\bullet)^\top \mathbf{b} - \varepsilon \mathbf{d}^\top \mathbf{b} \\ &= f(\mathbf{x}_k^\bullet) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{A} \mathbf{d} + \varepsilon \mathbf{d}^\top \underbrace{(\mathbf{A} \mathbf{x}_k^\bullet - \mathbf{b})}_{\mathbf{g}_k} \end{aligned}$$

Podívejme se na člen $\varepsilon (\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{A} \mathbf{d} + \mathbf{d}^\top \mathbf{g}_k)$, který nesmí být záporný. Pro pevné $\mathbf{d} \in \mathcal{H}_k$ jsou $\mathbf{d}^\top \mathbf{A} \mathbf{d} > 0$
a $\mathbf{d}^\top \mathbf{g}_k$ reálná čísla. Pokud je číslo $\mathbf{d}^\top \mathbf{g}_k$ nenulové, pak volbou

$$\varepsilon = -\frac{\mathbf{d}^\top \mathbf{g}_k}{\mathbf{d}^\top \mathbf{A} \mathbf{d}} \text{ dostáváme } \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{A} \mathbf{d} + \mathbf{d}^\top \mathbf{g}_k \right) = -\frac{(\mathbf{d}^\top \mathbf{g}_k)^2}{2 \mathbf{d}^\top \mathbf{A} \mathbf{d}} < 0,$$

což nelze (v \mathbf{x}_k^\bullet je minimum). Nutně tedy $\mathbf{d}^\top \mathbf{g}_k = 0$ pro všechny $\mathbf{d} \in \mathcal{H}_k$.

Pokud $\mathbf{g}_k \neq \mathbf{0}$, pak $\mathbf{g}_k \notin \mathcal{H}_k$ a jelikož $\mathbf{g}_k \in \mathcal{H}_{k+1}$ je ideálním kandidátem pro \mathbf{h}_k . Navíc je \mathbf{g}_k A-koľmý k \mathcal{H}_{k-1}

$$\mathbf{p} \in \mathcal{H}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{p} \in \mathcal{H}_k \Rightarrow 0 = \mathbf{q}^\top \mathbf{g}_k = \mathbf{p}^\top \mathbf{A}\mathbf{g}_k \Rightarrow \mathbf{g}_k \perp_{\mathbf{A}} \mathcal{H}_{k-1}.$$

tedy

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{p}_k, \quad \beta_k = -\frac{\mathbf{p}_k^\top \mathbf{A}\mathbf{g}_k}{\mathbf{p}_k^\top \mathbf{A}\mathbf{p}_k}.$$

Nyní ještě uvedeme několik zjednodušujících přepisů

$$\mathbf{g}_{k-1}^\top \mathbf{p}_k = \mathbf{g}_{k-1}^\top (\mathbf{g}_{k-1} + \beta_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}) = \|\mathbf{g}_{k-1}\|^2 + \beta_{k-1} \underbrace{\mathbf{g}_{k-1}^\top \mathbf{p}_{k-1}}_{=0} = \|\mathbf{g}_{k-1}\|^2$$

$$\mathbf{x}_k^\bullet = \mathbf{x}_{k-1}^\bullet - \alpha_k \mathbf{p}_k \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}_k^\bullet - \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}^\bullet - \mathbf{b} - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{p}_k \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{p}_k = \frac{1}{\alpha_k} (\mathbf{g}_{k-1} - \mathbf{g}_k)$$

$$\alpha_k \mathbf{g}_k^\top \mathbf{A}\mathbf{p}_k = \mathbf{g}_k^\top (\mathbf{g}_{k-1} - \mathbf{g}_k) = -\|\mathbf{g}_k\|^2, \quad \text{protože } \mathbf{g}_{k-1} \in \mathcal{H}_k, \mathbf{g}_k \perp \mathcal{H}_k$$

$$\alpha_k \mathbf{p}_k^\top \mathbf{A}\mathbf{p}_k = \alpha_k \mathbf{p}_k^\top \frac{1}{\alpha_k} (\mathbf{g}_{k-1} - \mathbf{g}_k) = \mathbf{p}_k^\top \mathbf{g}_{k-1} - \mathbf{p}_k^\top \mathbf{g}_k = \|\mathbf{g}_{k-1}\|^2, \quad \text{protože } \mathbf{p}_k \in \mathcal{H}_k.$$

Nyní již můžeme zapsat algoritmus metody sdružených gradientů.

- Z počáteční inicializace \mathbf{x}_0 spočteme \mathbf{g}_0 a položíme $\mathbf{p}_0 = \mathbf{g}_0$.
- Jestliže známe \mathbf{x}_{k-1} a \mathbf{g}_{k-1} spočteme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{p}_k, & \alpha_k &= \frac{\mathbf{g}_{k-1}^\top \mathbf{p}_k}{\mathbf{p}_k^\top \mathbf{A}\mathbf{p}_k} = \frac{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2}{\mathbf{p}_k^\top \mathbf{A}\mathbf{p}_k} \\ \mathbf{g}_k &= \mathbf{g}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{p}_k, & \beta_k &= -\frac{\mathbf{p}_k^\top \mathbf{A}\mathbf{g}_k}{\mathbf{p}_k^\top \mathbf{A}\mathbf{p}_k} = \frac{\|\mathbf{g}_k\|^2}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2}. \end{aligned}$$

Zdrojový kód 15 metody sdružených gradientů otestujeme na 2×2 příkladu, viz 16.

Listing 15: cg_method.m

```

1 function x = cg_method( A, b, x0, tol)
2 % x = cg_method( A, b, x0, tol)
3 % initialization
4 x = x0; g = A*x-b; p =g; old_g_norm = norm(g);
5 while old_g_norm > tol
6     Ap = A*p;
7     alpha = old_g_norm^2/(p'*Ap);
8     x = x - alpha*p;
9     g = g - alpha*Ap;
10    beta = (norm(g)^2)/(old_g_norm^2);
11    p = g + beta*p;
12    old_g_norm = norm(g);
13 end

```

Listing 16: cg_test.m

```

1 A = [5 2;2 5]; b = [-5 19]';
2 x_dir = A\b;
3 x_cg = cg_method(A,b,0*b,1e-16);

```

4.3 Dualita v QP

Mějme úlohu

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}, \quad \Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{B}_I \mathbf{x} \leq \mathbf{c}_I \wedge \mathbf{B}_E \mathbf{x} = \mathbf{c}_E\}$$

Řešení $\bar{\mathbf{x}}$ této úlohy musí splňovat

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b} + \mathbf{B}^\top \lambda &= \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{x}} &\in \Omega, \text{ tedy } \mathbf{B}_I \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c}_I \leq \mathbf{0} \wedge \mathbf{B}_E \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c}_E = \mathbf{0} \\ \lambda &= \begin{bmatrix} \lambda_I \\ \lambda_E \end{bmatrix}, \quad \lambda_I \geq 0, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_E \end{bmatrix} \\ \lambda^\top \mathbf{B} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c}) &= 0 \end{aligned}$$

Gradient f je

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}$$

Lagrangián

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) &= f(\mathbf{x}) + \lambda^\top (\mathbf{B} \mathbf{x} - \mathbf{c}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) &= \nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{B}^\top \lambda = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} + \mathbf{B}^\top \lambda \\ \nabla_{\lambda} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) &= \mathbf{B} \mathbf{x} - \mathbf{c} \end{aligned}$$

Sedlobodová úloha: najdi $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \Psi$

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}, \bar{\lambda})$$

Podmínky sedlového bodu

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}) &= \mathbf{0} \\ [\nabla_{\lambda} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda})]_E &= \mathbf{0}, \quad [\nabla_{\lambda} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda})]_I \leq \mathbf{0} \\ \bar{\lambda}^\top \nabla_{\lambda} \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}) &= 0 \end{aligned}$$

4.3.1 Dualita pro rovnostní omezení

Mějme úlohu

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}, \quad \Omega_E = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{c}\}$$

tedy sedlobodovou úlohu najdi $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}, \bar{\lambda}), \quad \text{kde } \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + \lambda^\top (\mathbf{B} \mathbf{x} - \mathbf{c})$$

Pro fixní $\hat{\lambda}$ dopočteme $\mathbf{x}(\hat{\lambda}) = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{B}^\top \hat{\lambda})$.

Označme si funkci

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda) &= \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathcal{L}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{B}^\top \lambda)^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{B}^\top \lambda) - \mathbf{b}^\top \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{B}^\top \lambda) + \lambda^\top (\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{B}^\top \lambda) - \mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{2} \lambda^\top \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^\top \lambda + \lambda^\top (\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{c}) - \frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \end{aligned}$$

tuto funkci minimalizujeme na \mathbb{R}^m , tedy

$$\mathbf{0} = \nabla \Theta(\bar{\lambda}) = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^\top \bar{\lambda} - (\mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b})$$

4.3.2 Dualita pro nerovnostní omezení

dsfsd

4.4 Rozšířený Lagrangián

Vezměme si problém

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{c}} \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b}$$

5 Analytická geometrie

Pro afinní útvary v \mathbb{R}^2 vám jistě nebude činit problém sepsat příslušné vzorečky analogické uvedeným vzorcům v následující kapitole.

5.1 Afinní útvary v \mathbb{R}^3

Význam skalárního součinu Mějme dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Jejich Eukleidovský skalární součin nám poskytuje informaci o úhlu mezi nimi

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\varphi), \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle,$$

kde délku vektoru rovněž spočítáme pomocí skalárního součinu

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}.$$

Přímka Přímka $p \subset \mathbb{R}^3$ je určena dvěma body \mathbf{A}, \mathbf{B} a pro každý $\mathbf{X} \in p$ existuje $t \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t(\mathbf{B} - \mathbf{A}).$$

Nepřesně lze pro přímku psát

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \langle \mathbf{u} \rangle.$$

Příklad 21. Mějme body

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

najděte rovnice přímek $p = \mathbf{AB}$, $q = \mathbf{AC}$ a jejich průsečíky se souřadnicovou rovinou $\mathbf{O}x_1x_2$, tj. $x_3 = 0$.

Řešení. Evidentně pouze dosadíme do vzorce přímky

$$p : p \ni \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + t \left(\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -10 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$q : q \ni \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + s \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pro průsečíky \mathbf{P}, \mathbf{Q} s rovinou $\mathbf{O}x_1x_2$ platí

$$0 = [\mathbf{P}]_3 = 3 - 4t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{3}{4} \begin{bmatrix} -10 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0 = [\mathbf{Q}]_3 = 3 - 0s \Rightarrow \text{přímka } \mathbf{AC} \text{ neprochází rovinou } \mathbf{O}x_1x_2.$$

□

Příklad 22. Odvoďte nějaký vzorec pro vzdálenost bodu od přímky

Řešení. Mějme bod \mathbf{M} a přímku p zadanou body \mathbf{A} a \mathbf{B} . Vzdálenost bodu \mathbf{M} od libovolného $\mathbf{X} \in p$ je

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{X}\| = \|\mathbf{M} - (\mathbf{A} + t\mathbf{u})\|, \quad \mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}.$$

Pro vzdálenost $v(\mathbf{M}, p)$ tedy platí

$$\begin{aligned} v^2(\mathbf{M}, p) &= \min_{\mathbf{X} \in p} \|\mathbf{M} - \mathbf{X}\|^2 = \min_{t \in \mathbb{R}} \|\overbrace{\mathbf{M} - \mathbf{A}}^{\mathbf{v}} - t\mathbf{u}\|^2 = \min_{t \in \mathbb{R}} [\mathbf{v} - t\mathbf{u}]^\top [\mathbf{v} - t\mathbf{u}] \\ &= \min_{t \in \mathbb{R}} t^2 \mathbf{u}^\top \mathbf{u} - 2t \mathbf{u}^\top \mathbf{v} + \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \end{aligned}$$

což je minimum kvadratické funkce $at^2 + bt + c$, které je nabyto pro $t = \frac{-b}{2a}$, tedy v našem případě pro

$$t = \frac{2\mathbf{u}^\top \mathbf{v}}{2\mathbf{u}^\top \mathbf{u}} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

a proto

$$\begin{aligned} v^2(\mathbf{M}, p) &= \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^4} \|\mathbf{u}\|^2 - 2 \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|^2} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \\ v(\mathbf{M}, p) &= \sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2}} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}. \end{aligned}$$

□

Rovina Rovina $\rho \subset \mathbb{R}^3$ je určena třemi body \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , pro které jsou vektory \mathbf{AB} a \mathbf{AC} lineárně nezávislé. pro každý $\mathbf{X} \in \rho$ existuje dvojice $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ taková, že

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + s(\mathbf{C} - \mathbf{A}).$$

Jiná možnost zápisu je pomocí normálového vektoru

$$\mathbf{n} = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{A})$$

a to tak, že pro každý bod \mathbf{X} roviny ρ je vektor $\mathbf{X} - \mathbf{A}$ kolmý k vektoru \mathbf{n} :

$$(\mathbf{n}, \mathbf{X} - \mathbf{A}) = (\mathbf{n}, \mathbf{X}) + \overbrace{(\mathbf{n}, -\mathbf{A})}^d = 0.$$

Nepřesně lze pro rovinu psát

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle.$$

Příklad 23. Odvoďte vzorec pro vzdálenost bodu od roviny

Řešení. Uvedeme si dva způsoby – dva různé vzorce, jak tuto úlohu spočítat. Všimněme si různé výpočetní náročnosti v níže uvedených řešeních. Který ze vzorců bude výpočetně méně náročný. Který ze vzorců bude použitelný pouze v \mathbb{R}^3 , a který bude fungovat v \mathbb{R}^n pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$?

i) Mějme bod \mathbf{M} a rovinu ρ zadanou body \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} . Vzdálenost bodu \mathbf{M} od libovolného $\mathbf{X} \in \rho$ je

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{X}\| = \|\mathbf{M} - (\mathbf{A} + t\mathbf{u} + s\mathbf{w})\|, \quad \mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{C} - \mathbf{A}.$$

Pro vzdálenost $v(\mathbf{M}, \varrho)$ tedy platí

$$\begin{aligned}
v^2(\mathbf{M}, \varrho) &= \min_{\mathbf{X} \in \varrho} \|\mathbf{M} - \mathbf{X}\|^2 = \min_{t, s \in \mathbb{R}} \|\overbrace{\mathbf{M} - \mathbf{A}}^{\mathbf{v}} - t\mathbf{u} - s\mathbf{w}\|^2 = \min_{t, s \in \mathbb{R}} [\mathbf{v} - t\mathbf{u} - s\mathbf{w}]^\top [\mathbf{v} - t\mathbf{u} - s\mathbf{w}] \\
&= \min_{t, s \in \mathbb{R}} t^2 \mathbf{u}^\top \mathbf{u} + \mathbf{v}^\top \mathbf{v} + s^2 \mathbf{w}^\top \mathbf{w} - 2t\mathbf{u}^\top \mathbf{v} - 2s\mathbf{w}^\top \mathbf{v} + 2st\mathbf{u}^\top \mathbf{w} \\
&= \mathbf{v}^\top \mathbf{v} + \min_{t, s \in \mathbb{R}} 2 \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} t & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\top \mathbf{u} & \mathbf{u}^\top \mathbf{w} \\ \mathbf{u}^\top \mathbf{w} & \mathbf{w}^\top \mathbf{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\top \mathbf{v} \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{v} \end{bmatrix} \right) \\
&= \|\mathbf{v}\|^2 + \min_{t, s \in \mathbb{R}} 2 \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} t & s \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & s \end{bmatrix} \mathbf{b} \right), \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\top \mathbf{u} & \mathbf{u}^\top \mathbf{w} \\ \mathbf{u}^\top \mathbf{w} & \mathbf{w}^\top \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\top \mathbf{v} \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{v} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vektory \mathbf{u} a \mathbf{w} svírají úhel α , splňující $|\cos(\alpha)| \neq 1$, jelikož jsou lineárně nezávislé (jinak by body \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} neurčovaly rovinu). Pro determinant matice uvedené kvadratické funkce platí

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}^\top \mathbf{u} & \mathbf{u}^\top \mathbf{w} \\ \mathbf{u}^\top \mathbf{w} & \mathbf{w}^\top \mathbf{w} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}\|^2 & (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{w}) & \|\mathbf{w}\|^2 \end{bmatrix} = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{w})^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 (1 - \cos^2(\alpha)) > 0,$$

tedy uvedená kvadratická funkce má pozitivně definitní matici. Taková kvadratická funkce má minimum, v němž je její gradient (viz Příklad 20) nulový. Proto

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} &= \mathbf{b}, \quad \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab - c^2} \begin{bmatrix} b & -c \\ -c & a \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}\|^2 & (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{w}) & \|\mathbf{w}\|^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\top \mathbf{v} \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{v} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{w})^2} \begin{bmatrix} \|\mathbf{w}\|^2 & -(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ -(\mathbf{u}, \mathbf{w}) & \|\mathbf{u}\|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\top \mathbf{v} \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{v} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dosazením tedy

$$\begin{aligned}
v^2(\mathbf{M}, \varrho) &= \|\mathbf{v}\|^2 + 2 \left(\mathbf{b}^\top \mathbf{A}^{-\top} \left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{b} \right) \right) = \|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{b}^\top \mathbf{A}^{-\top} \mathbf{b} \\
&= \|\mathbf{v}\|^2 - \begin{bmatrix} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}\|^2 & (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{w}) & \|\mathbf{w}\|^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \end{bmatrix} \\
&= \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 \|\mathbf{w}\|^2 + (\mathbf{w}, \mathbf{v})^2 \|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u}, \mathbf{w})(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{w})^2}.
\end{aligned}$$

- i) Druhý způsob je převzatý z [7]. Bod roviny ϱ popíšeme druhým způsobem $(\mathbf{n}, \mathbf{X} - \mathbf{A}) = 0$. Nejbližší bod $\mathbf{M}_0 \in \varrho$ od bodu \mathbf{M} leží na přímce $\mathbf{M} + t\mathbf{n}$. Najdeme průnik této přímky s rovinou ϱ

$$0 = (\mathbf{n}, \mathbf{M} + t\mathbf{n} - \mathbf{A}) = (\mathbf{n}, \mathbf{M} - \mathbf{A}) + t\|\mathbf{n}\|^2, \quad \Rightarrow t = -\frac{(\mathbf{n}, \mathbf{M} - \mathbf{A})}{\|\mathbf{n}\|^2}, \quad \Rightarrow \mathbf{M}_0 = \mathbf{M} - \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{M} - \mathbf{A})}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n}$$

a pak snadno

$$v(\mathbf{M}, \varrho) = \|\mathbf{M} - \mathbf{M}_0\| = \|\mathbf{M} - \mathbf{M} + t\mathbf{n}\| = |t|\|\mathbf{n}\| = \frac{|(\mathbf{n}, \mathbf{M} - \mathbf{A})|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

□

6 Variační princip

Věta 24. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je SPD. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

- (i) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- (ii) $\mathbf{y}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{b}$ pro všechna $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
- (iii) $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ pro všechna $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, kde $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}$

Důkaz. • (i) \Rightarrow (ii) triviální

- (ii) \Rightarrow (iii)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{d})^\top A(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \mathbf{b}^\top (\mathbf{x} + \mathbf{d}) - f(\mathbf{x}) = \overbrace{\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}}^{f(\mathbf{x})} + \frac{2}{2}\mathbf{d}^\top A\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^\top A\mathbf{d} - \mathbf{b}^\top \mathbf{d} - f(\mathbf{x}) \\ &= \underbrace{\mathbf{d}^\top (A\mathbf{x} - \mathbf{b})}_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow = 0} + \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{d}^\top A\mathbf{d}}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

- (iii) \Rightarrow (i) Pro všechna $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$0 \leq f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}) - f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{d}^\top (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \frac{\alpha^2}{2}\mathbf{d}^\top A\mathbf{d}$$

Na pravé straně rovnosti je kvadratická funkce proměnné α , která je nezáporná na \mathbb{R} a dosazením ukážeme, že v $\alpha = 0$ má minimum 0. Jelikož je kvadratická funkce hladká, musí být v minimu její derivace $\mathbf{d}^\top (A\mathbf{x} - \mathbf{b})$ nulová pro jakékoli $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$. Tímto jsme dokázali (ii). Protože $\mathbf{d}^\top (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$ pro jakékoli $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, musí nutně platit (i). □

7 Metoda nejmenších čtverců

Motivace: Mějme sadu tří měření veličiny x . Změřili jsme postupně 70, 70, 80. To lze zapsat jako

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 70 \\ 70 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Je evidentní, že tato soustava (obecně $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) nemá řešení, neexistuje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ aby vektor $A\mathbf{x}$ byl roven vektoru \mathbf{b} . Může nás ale zajímat takové \mathbf{x} , pro které je rozdíl $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ (měřený nějakou mírou) nejmenší. Často volenou je míra generovaná standardním skalárním součinem v \mathbb{R}^n , tedy minimalizujeme

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|^2 = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^\top (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{b} + \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{x}^\top A^\top A\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top A^\top \mathbf{b}$$

Minimalizujeme kvadratickou funkci více proměnných. Pro takovouto funkci známe gradient $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 2A^\top A\mathbf{x} - 2A^\top \mathbf{b}$, který musí být v minimu roven nule. Tedy

$$\mathbf{x} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b}$$

V našem příkladě

$$\mathbf{x} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 70 \\ 80 \end{bmatrix} = 3^{-1}(70 + 70 + 80) = \frac{70 + 70 + 80}{3} \simeq 73.3333$$

8 Optimalizace kvadratických funkcí

8.1 Minimalizace bez omezení

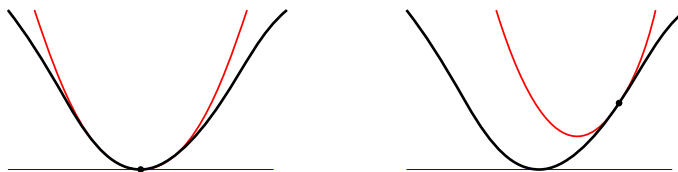
V této kapitole se budeme zabývat minimalizací kvadratické funkce

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x},$$

není ale na škodu připomenout si, co je to minimalizace

$$\min f(\mathbf{x})$$

hladké funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, viz například Obrázek 12 znázorňující příklad minimalizace funkce $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$.



Obrázek 12: $f(\mathbf{x})$ a $T_f(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ (vlevo) a jiné \mathbf{x} (vpravo)

Obvykle lokálně nahrazujeme takovou funkci Taylorovým rozvojem druhého řádu

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \underbrace{f(\mathbf{x}) + \nabla f^\top(\mathbf{x})\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^\top \nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{d}}_{T_f(\mathbf{x}+\mathbf{d})} + O(\|\mathbf{d}\|^2),$$

který bude pro kvadratické funkce

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{d}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{d})^\top \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \mathbf{b}^\top (\mathbf{x} + \mathbf{d}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}}_{f(\mathbf{x})} + \underbrace{\mathbf{d}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})}_{\nabla f(\mathbf{x})} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d} \end{aligned}$$

Poznamenejme jen, že vzorec pro gradient $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ kvadratické funkce f jsme již odvodili v Příkladu 20. Podobným způsobem lze odvodit, že Hessián $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.

8.2 Minimalizace s rovnostními omezeními

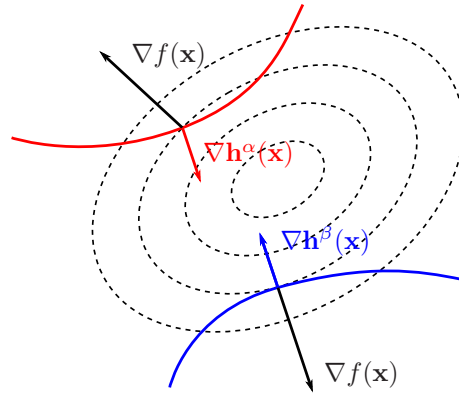
Pokud k minimalizaci navíc přidáme omezení $\mathbf{x} \in \Omega_E = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^c$ bude minimalizační úloha

$$\min_{\mathbf{h}(\mathbf{x})=\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) \quad \Omega_E = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

komplikovanější. V minimu $\hat{\mathbf{x}}$ musí platit

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \nabla \mathbf{h}_1(\hat{\mathbf{x}}) + \dots + \lambda_c \nabla \mathbf{h}_c(\hat{\mathbf{x}}), \quad \nabla f(\hat{\mathbf{x}}) \in \text{Span } \nabla \mathbf{h} = \langle \nabla \mathbf{h}_1(\hat{\mathbf{x}}), \dots, \nabla \mathbf{h}_c(\hat{\mathbf{x}}) \rangle$$

což je ilustrováno na Obrázku 13.



Obrázek 13: $f(\mathbf{x})$ a $T_f(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ (vlevo) a jiné \mathbf{x} (vpravo)

Vraťme se k minimalizaci kvadratické funkce a omezíme se pouze na lineární funkce \mathbf{h} .

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \mathbf{x} - \mathbf{c}$$

V tomto případě je množina Ω_E konvexní, tj

$$\mathbf{x}, \mathbf{d} \in \Omega_E \Rightarrow (\forall \lambda \in (0, 1)) > \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d} \in \Omega_E .$$

Pokud je $\hat{\mathbf{x}}$ řešení a $\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d} \in \Omega_E$ (tj. $\mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}) - \mathbf{c} = \mathbf{0}$), pak protože $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega_E$ ($\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$) platí $\mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{0}$, což znamená $\mathbf{d} \in \text{Ker } \mathbf{B}$ a geometricky $\mathbf{d} \perp \nabla \mathbf{h}$. Protože \mathbf{d} je kolmé k $\nabla \mathbf{h}$ a $\nabla f \in \text{Span } \nabla \mathbf{h}$, pro všechny $\mathbf{d} \in \text{Ker } \mathbf{B}$ je $(\nabla f)^\top \mathbf{d} = 0$.

8.3 KKT podmínky (Karush–Kuhn–Tucker)

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) \perp \text{Ker } \mathbf{B}$$

Lemma:

$$(\text{Ker } \mathbf{B})^\top = \text{Im } \mathbf{B}^\top$$

Proof>

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{z} \in \text{Im } \mathbf{B}, & & \mathbf{x} \in \text{Ker } \mathbf{B} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{z} = \mathbf{B}^\top \mathbf{y} & & \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{array}$$

Věta (KKT):

$$f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_E$$

právě tehdy když existuje λ tak, že $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}^\top \lambda = \mathbf{0}$, což lze zapsat jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

8.4 Co je to Lagrangeův multiplikátor λ ?

Platí

$$\begin{aligned}\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{d}^\top \nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^\top \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda} &= 0 \\ (\nabla f)^\top(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{d} &= -\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{B} \mathbf{d}\end{aligned}$$

8.5 Minimalizace s nerovnostmi

Mějme úlohu

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega_I} f(\mathbf{x}) \quad \Omega_I = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in \{1, \dots, n\} = \mathcal{N}\}$$

Předpokládejme, že máme řešení $\hat{\mathbf{x}}$. Pak lze disjunktně rozdělit množinu \mathcal{N} na volnou (\mathcal{F}) a aktivní (\mathcal{A}) množinu

$$\begin{aligned}i \in \mathcal{F} \subset \mathcal{N} &\Leftrightarrow h_i(\hat{\mathbf{x}}) < 0 \\ i \in \mathcal{A} \subset \mathcal{N} &\Leftrightarrow h_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0\end{aligned}$$

TTODO

Věta () Hledáme minimum $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$ s nerovnostními omezeními $\mathbf{x} \in \Omega_I$. Pak existuje $\boldsymbol{\lambda}$, $\lambda_i \geq 0$ tak, že

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} + \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

8.6 Duální úloha pro minimalizaci s rovnostmi

Mějme smíšenou úlohu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

Z prvního řádku plyne

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda})$$

a dosazením do druhého dostaneme

$$\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{c} \Rightarrow -\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

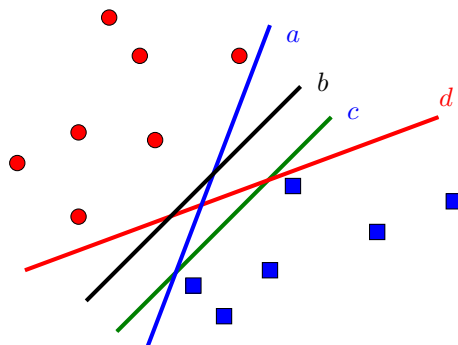
8.7 Duální úloha pro minimalizaci s nerovnostmi

sdf

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{B} \mathbf{x} - \mathbf{c})$$

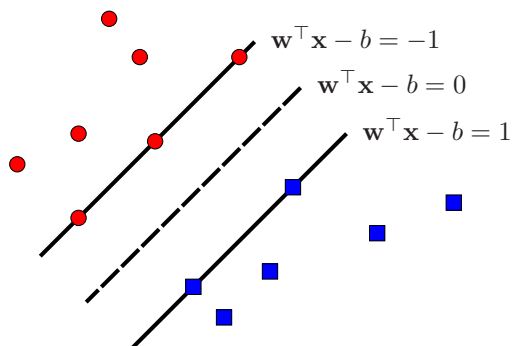
9 Support vector machines

Mějme množinu $\{(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_k, y_k)\}$, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i \in \{-1, 1\}$ bodů v \mathbb{R}^n a jejich binární klasifikaci $\{-1, 1\}$, která říká, do jaké množiny bod patří. Naším cílem je vytvořit na základě vstupních dat kritérium, které rozdělí \mathbb{R}^n na dvě disjunktní množiny.



Obrázek 14: Body dvou kategorií a oddělovací přímky

Na Obrázku 14 jsou vidět čtyři přímky, které oddělují body obou kategorií. Jakou z nich však vybrat? Zkusme to tak, že vybereme tu přímku, která má od obou množin nejdelší vzdálenost. Z přímek a , b , c a d na Obrázku 14 je to přímka b , což je patrné z Obrázku 15.



Obrázek 15: Oddělovací přímka jako „střed cesty“

Reference

- [1] J. Bouchala: Matematika III. VŠB (2000),
http://home1.vsb.cz/~bou10/MA_2/ma3_bc.pdf
- [2] W. Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru. Academia (2003)
- [3] Z. Dostál, V. Vondrák: Lineární algebra. VŠB (2012),
<http://mi21.vsb.cz/modul/linearni-algebra>
- [4] Z. Dostál, L. Šindel: Lineární algebra pro kombinované a distanční studium. VŠB (2003),
http://home1.vsb.cz/~s1a64/lait/linearni_algebra_pro_kombinovane_studium.pdf
- [5] T. Kozubek, T. Brzobohatý, M. Jarošová, V. Hapla, A. Markopoulos: Lineární Algebra s MatLabem. VŠB (2012)
http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra_s_matlabem.pdf
- [6] J. Kuben, Š. Mayerová, P. Račková, P. Šarmanová: Diferenciální počet funkcí více proměnných. VŠB (2012),
<http://mi21.vsb.cz/modul/integralni-pocet-funkci-vice-promennych>
- [7] L. Šindel, O. Vlach: Analytická geometrie. VŠB (2012),
<http://mi21.vsb.cz/modul/analyticka-geometrie>