Pár tipů k projektům:

Fourier

- Nejprve ze všeho ověřte kvadratickou integrovatelnost zadané funkce, tj., že platí

$$\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

  Alternativně stačí ověřit, že zadaná funkce má konečný počet skoků (evidentní na první pohled) a je na zadané periodě omezená.

- Koeficienty Fourierovy řady si nechte spočítat softwarově. Celkově je fajn na počítání koeficientů, spekter, vykreslování apod. mít napsaný skript třeba v Matlabu.

- Pokud budete dělat FŘ v komplexním tvaru, tj.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-ik\omega t},$$

  nezapomeňte, že suma obsahuje i členy se záporným indexem, tj. když se po Vás chce v zadání 3. částečný součet, musíte, na rozdíl od FŘ v reálném tvaru, sčítat pro $k = -3, \dots, 3$.

- V novějších verzích Matlabu (*2016b* a vyšší, pokud se nepletu) lze po částech definovanou funkci zadat pomocí metody `piecewise`. Pokud toto k dispozici nemáte, je třeba si funkci ručně definovat nebo koeficienty počítat po částech jako součet integrálů za jednotlivé části (potom pozor na integrační meze). Např. pokud $T = 5$ a

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 1, & t \in \langle 0, 2), \\ 5 - t, & t \in \langle 2, 3), \\ 4, & t \in \langle 3, 5) \end{cases}$$

  pak

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 (t^2 + 1)\mathrm{d}t + \int_2^3 (5 - t)\mathrm{d}t + \int_3^5 4\mathrm{d}t.$$

- Napište si svůj skript tak, abyste si mohli pouhou změnou parametru určit, kolikátý částečný součet chcete vykreslit, a vykreslete si i vyšší, než jen třetí částečný jako v zadání - poznáte lépe, zda se blížíte původní funkci.

```
syms t k
% k volim take jako symbolickou promennou, abych mohl dosazovanim za k dostat libovolny koeficient
% Mam nejak napocitane obecne koeficienty ak,bk v zavislosti na k, napr.:
w = 2*pi/T;
a0 = 2/T*int(f(t),t,0,T);
ak = 2/T*int(f(t)*cos(k*w*t),t,0,T);
bk = 2/T*int(f(t)*sin(k*w*t),t,0,T);

n = 10; % kolikaty soucet chci
sn = a0/2 + sum(subs(ak*cos(k*w*t) + bk*sin(k*w*t),k,1:n));
ezplot(sn,[-2*T,2*T])  % Vykreslim castecny soucet na 4 periodach
```

Algoritmus 1: Příklad výpočtu libovolného částečného součtu v Matlabu

Ale pozor, to, že pro nějaké konkrétní k koeficient nejde spočítat kvůli dělení nulou neznamená, že se na situaci pro dané k máte vykašlat, prostě musíte natvrdo tento problémový koeficient spočítat zvlášť s pevně dosazeným problémovým k. Alternativně se dá udělat $\lim\limits_{k\to \text{problémové } k} a_k$ (případně b_k), ale ne vždy to musí projít a je to podle mě náročnější, než koeficient spočítat bokem.

- Pro výpočet sinové a kosinové řady nepotřebujete definovat sudé a liché prodloužení (výpočty se obkonají ze zadané funkce), nicméně pro vykreslování nekonečného součtu je nějakým způsobem vyrobit budete muset. Opět buď pomocí `piecewise` nebo ve starších verzích ručně. **POZOR!** Spousta studentů dělá tu chybu, že periodicky opakují doprava jen "kladnou" polovinu a doleva jen "zápornou" polovinu sudého/lichého prodloužení a pak se diví, že to nesedí se součtem kosinové/sinové řady. Samozřejmě musíte periodicky opakvat celý kus od $-T$ do T, jinak byste sice měli symetrii, ale ne periodicitu.

- Pokud pracujete v Matlabu, a nejste si u fázových spekter úplně jistí, jak se počítá argument přes arctan nebo arccos, mějte na paměti, že Matlab umí argument komplexního čísla spočítat sám pomocí metody `angle`. Podobná funkce takřka určitě existuje i v jiných softwarech (v Maplu je to `argument`, v Mathcadu je to `arg`, atd.).

- Při vykreslování nekonečných součtů nezapomeňte na průměry ve skocích! Můžete je do grafů přidělat v malování, pokud to kódovou cestou představuje přílišnou překážku.

- Vykreslujte více, než jednu periodu.

- Pokud budete dělat spektra oboustranně, pro kontrolu by mělo platit, že amplitudové by mělo být sudé (symetrické podle osy y) a fázové liché (symetrické podle počátku). To je dáno faktem, že v projektech máte zadány reálné funkce, a_k, b_k jsou tedy také reálná čísla, a koeficienty c_k s c_{-k} jsou tím pádem komplexně sdružené.

- Nezapomínejte, že φ_0 NENÍ DEFINOVÁNO! Pokud se navíc v případě sinové (resp. kosinové) řady stane, že nějaké konkrétní b_m (resp. a_m) vyjde 0, tak ani φ_m není definováno (protože ani $\arg 0$ není definován).

- Fázová spektra sinových a kosinových řad mají vždy jen 2 různé hodnoty, nezapomeňte na to.

- Kdo zásadním způsobem není kamarád s Matlabem či jiným odbornějším software nebo programovacím jazykem, projekt se dá udělat i v MS Excel. K integrování pak můžete použít funkci QUADF, nicméně pro její užití budete potřebovat přídavek Calculus, ke stažení zde: `https://appsource.microsoft.com/en-us/product/office/wa200002468`. Pozor, budete se muset přihlásit přes svůj Microsoft účet, případně přes školní, pokud svůj nemáte. **Rozšíření je zadarma jen na týden**, pak za něj budete muset platit, ale k vypracování projektu by Vám to snad mohlo stačit. Ukázky výpočtů s touto funkcí naleznete zde: `https://excel-works.com/manual/quadf`.

K výpočtu argumentu komplexního čísla automaticky z koeficientů můžete užít funkcí IMARGUMENT a COMPLEX (tyto jsou už v základní výbavě Excelu):

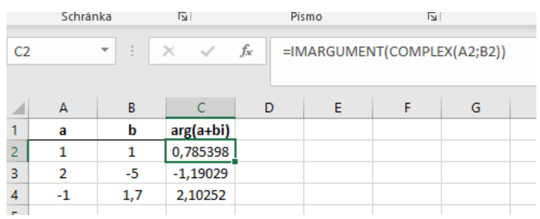

Figure 1: Výpočet fází v MS Excel

Laplace

- U každého příkladu ověřte omezený růst pravé strany zadané diferenciální rovnice, tj. máte-li

$$\text{„levá strana diferenciální rovnice“} = f(x)$$

musíte ověřit, že existují konstanty M, σ takové, že $M > 0$ a

$$\forall x \geq 0: \quad |f(x)| \leq M\mathrm{e}^{\sigma x}.$$

Konstanty M a σ stačí nějak odhadnout, nemusíte je určovat „optimálně“, jde čistě o to, aby byla splněna nerovnost výše. Že jste zvolili vhodné σ si můžete lehce ověřit pomocí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{\sigma x}} < \infty$$

a M můžete položit rovno $|f(0)|$, eventuálně $M = 1$, pokud $f(0) = 0$. Parametr σ většinou stačí volit jako 1, pokud je f polynom, odmocnina nebo podobně. Zvolit M uvedeným způsobem ve skutečnosti stejně nemusí fungovat pro všechna $x \geq 0$, ale formálně stačí, když to funguje „pro dostatečně velká x“.
Pokud je $f(x)$ přímo exponenciála, tak se σ zvolí stejné jako je v zadané funkci (např. když budu mít $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$, volím $\sigma = 3$).

- Nezapomínejte při transformování levé strany zohlednit počáteční podmínky. Ty nenulové se projeví tak, že se vám začnou objevovat členy s transformační proměnnou, tj. budete tam mít „něco s s a $Y(s)$ a něco jen s s“.[1] Ty členy jen s proměnnou pak musíte převést napravo, než budete pokračovat.

- Zpětná transformace se dá získat (mimo jiných způsobů) buďto rozkladem na parciální zlomky a následným vyčtením z tabulek, nebo přímou zpětnou transformací pomocí reziduí, a v některých případech pomocí konvoluce. Jelikož rezidua však budeme probírat až na konci semestru, a s konvolucí jste se pravděpodobně mockrát při studiích nesetkali, budete nejspíš počítat pomocí parciálních zlomků. Na ty použijte nějaký software online, např. `Symbolab` nebo `WolframAlpha`, občas jsou ty rozklady opravdu hodně nepěkné. Samozřejmě, pokud by někdo ovládal i druhé dvě zmíněné techniky, jejich použití je vítáno.

- Ve druhém příkladě tohoto projektu budete muset provést lineární transformaci proměnné, abyste měli počáteční podmínky zadané diferenciální rovnice definované v 0. Dejte si pozor na znaménko ($\tilde{x} = x - a$, kde a je bod, v němž jsou zadány okrajové podmínky), a především, jakmile transformovanou rovnici pomocí Laplaceovy transformace vyřešíte, **nezapomeňte zase transformovat řešení zpátky do původní proměnné!**

[1] Nebo p, nebo jak vlastně chcete, záleží jak si tu proměnnou označíte.

- Ve třetím příkladě budete mít nespojitou pravou stranu, většinou nenulovou jen na nějakém úseku $\langle a, b\rangle$. Její Laplaceovu transformaci můžete spočítat buď z definice[2]

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x,$$

  nebo pomocí Heavisideových funkcí: $\eta(x-a) - \eta(x-b)$ je funkce, která je na intervalu $\langle a, b\rangle$ rovna 1, a jinde je nulová. Na $\eta(x)$ je tabulkový Laplace, na posunutí v argumentu je také tabulkové pravidlo. Máte-li zadanou funkci nespojitou a ještě navíc nekonstantní (většinou lineární), musíte si ještě pomoct tabulkovým pravidlem $\mathcal{L}\{-t \cdot f(t)\} = F'(s)$, a nebo zkrátka upočítat Laplaceův integrál. Při zpětné transformaci u tohoto příkladu bude vznikat posunutí kvůli vlastnosti $\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{e}^{-as}F(s)\} = \eta(t-a)f(t-a)$. Výsledná funkce tak bude mít více „větví“, stejně jako zadaná pravá strana. Před zpětnou transformací si exponenciál „nevšímejte“, pracujte jen se zlomky u kterých jsou, až poté zohledněte jejich efekt při zpětné LT.

- V každém příkladě lze provést zkoušku tím, že nalezenou funkci jednoduše dosadíte do zadané diferenciální rovnice a zjistíte, jestli je vlevo totéž, co vpravo. Zde může být drobná zrada, tato zkouška Vám může vyjít i v případě, že jste při LT špatně zohlednili počáteční podmínky. Proto, pokud si chcete být zcela jistí, byste krom dosazení do rovnice měli ověřit, že sedí i ony. To už je nicméně jednoduchoučký úkon - dosazení čísla do funkce. Funkci máte a její derivaci stejně při dosazení do zadané rovnice musíte najít.

[2] V definici je integrál od 0 do ∞, nicméně, je-li zadaná funkce nenulová jen na $\langle a, b\rangle$, meze integrálu se změní právě na a, b.