Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Lineární algebra

Souhrn ze cvičení

Poznámka úvodem

Tento dokument vznikl jako doplnění podkladů ke cvičením z předmětu Lineární algebra pro studijní program Informační a komunikační technologie pro akademický rok 2018/19. Rozhodně se NEJEDNÁ o plnohodnotný výukový text, a to především (ale nejen) s ohledem na některé pojmy v rámci teorie, které zde buď chybí, nebo jsou pojaty velice vágně. Tento text slouží především studentům jako základní přehled probrané látky, a eventuálně jako zdroj s trochu alternativním pohledem na některé pojmy. Dále slouží samotnému autorovi jako osnova ke cvičením. Hlavně teorii doporučuji nastudovat spíše ze skript prof. Dostála:
`http://mi21.vsb.cz/modul/linearni-algebra`

V případě, že v textu narazíte na něco věcně špatného, málo srozumitelného, politicky nekorektního či z jiného důvodu problematického, dejte mi prosím vědět na e-mail `david.ulcak@vsb.cz`.

V Ostravě 20.2.2019[1] *Téměř anonymní zvěř*

[1]Zatím poslední změny proběhly 10. listopadu 2022.

Obsah

1 Komplexní čísla

- **Komplexní číslo** je číslo ve tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$.
- **Reálná a imaginární část**:
  Jestliže $z = a + bi$, tak Re $z = a$, Im $z = b$.

  Častá chyba: Spousta studentů napíše Im $z = bi$. **To je ale špatně,** i **se sem nepíše!** Imaginární část říká „kolik tam toho imaginárního je“, jinak řečeno je to vždycky jen „to, co je u i“.

  Např.: $z = 1 + i\sqrt{3}$, tzn. Re $z = 1$, Im $z = \sqrt{3}$.
- Dvě komplexní čísla se rovnají právě tehdy, když se rovnají jejich reálné a imaginární části, tzn.
  $$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i, \qquad z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad (a_1 = a_2 \ \wedge \ b_1 = b_2)\,.$$
- Sčítáme a odečítáme „po složkách“, násobíme klasicky roznásobením:
  $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$:
  $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i, \quad z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$
- Základní mocniny i:
  $$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1,$$
  a protože $i^4 = 1$, není těžké si rozmyslet, že pak už se to cyklicky opakuje (tzn., že např. $...i^{-1} = i^3 = i^7 = i^{11}...$, a podobně).
- **Číslo komplexně sdružené k** z:
  Značíme jej $\overline{z}$, definováno je následovně: Jestliže $z = a + bi$, pak $\overline{z} = a - bi$. Nenechme se zmást značením „plus a mínus“, komplexní sdružení jednoduše obrací znaménko u imaginární části. Zjevně platí:
  $\overline{\overline{z}} = z$
  $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.....**Tj.** $z \cdot \overline{z}$ **je vždy nezáporné reálné číslo!**

  Např.: $z = 1 + i\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = 1 - i\sqrt{3}, \qquad z \cdot \overline{z} = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4.$

  Je-li z kořenem nějakého polynomu (s reálnými koeficienty), je jeho kořenem i $\overline{z}$. Např.:
  $$x^2 - 2x + 2 = 0 \ \ .... \ x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i,$$

$$x_1 = 1+i,\ x_2 = 1-i \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \overline{x_2}.$$

- Při *dělení* komplexních čísel se řídíme mottem „nechceme žádné i ve jmenovateli“. Zbavíme se jej za použití rozšíření pomocí komplexně sdruženého jmenovatele, neboť už víme, že $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}_0^+$, a zlomek (podobně, jako když se zbavujeme odmocnin) vynásobíme „vhodně napsanou jedničkou“:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{(\mathrm{Re}\ z_2)^2 + (\mathrm{Im}\ z_2)^2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Např.:

$$\frac{2-4i}{1-i} = \frac{2-4i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(2-4i)(1+i)}{2} = \frac{2-4i+2i-4(-1)}{2} = \frac{6-2i}{2} = \underline{\underline{3-i}}$$

Občas je dobré si pamatovat, že speciálně $\frac{1}{i} = -i$.

- **Absolutní hodnota**:

Udává „vzdálenost od 0“ v Gaussově rovině - komplexní čísla lze v určitých směrech ztotožnit s dvourozměrnými vektory ($z = a+bi \sim [a, b]$), absolutní hodnota je tedy v podstatě velikost tohoto vektoru.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

Pozn.: Už z toho, že absolutní hodnota udává „velikost“ je jasné, že jde o **nezáporné reálné číslo!** Spoustě studentů po chybě z nepozornosti zůstane v absolutní hodnotě i a vůbec jim to není divné. Ale jak je velké něco, co měří třeba $4+2i$? Nevím jak Vy, ale já si to moc představit neumím.

- Absolutní hodnoty různých komplexních čísel můžeme porovnávat, takže z tohoto pohledu lze mluvit o tom, které z nich je „větší“, tj. například výraz $|z_1| > |z_2|$ má smysl (samozřejmě totéž lze říct o $\geq, <, \leq$). Jak je to ale s komplexními čísly jako takovými? Dá se v nějakém smyslu psát $z_1 > z_2$?

Jelikož $i \neq 0$, tak by nevyhnutelně muselo platit buď $i > 0$, nebo $i < 0$. V případě $i > 0$ by to znamenalo, že také $i^2 > 0$, jenže $i^2 = -1$, takže by muselo platit $-1 > 0$, což je samozřejmě nesmysl. Pokud by naopak bylo $i < 0$, dostali bychom opět $i^2 = -1 > 0$ (protože pokud $i < 0$, tak násobení nerovnosti číslem i otočí nerovnost). Pokud se Vám to zdá celé jakési podivné, máte pravdu: **Na komplexních číslech NELZE zavést uspořádání.** A to nejen klasické „větší/menší“, ale žádná relace (úplného) uspořádání.

- **Argument komplexního čísla**:
  Úhel, který „vektor“ z svírá s kladnou částí reálné osy, přesněji řečeno množina všech úhlů, které této poloze odpovídají. Značíme Arg z. Pro číslo 0 **není definován**.

  Hlavní hodnotu argumentu značíme $\arg z$ a rozumíme jím takový úhel, který je ze „základního“ intervalu $(-\pi, \pi\rangle$.

  $\arg z \in (-\pi, \pi\rangle$, vypočítat jej můžeme několika způsoby (svým způsobem počítáme úhel v pravoúhlém trojúhelníku, viz Obrázek 1):
  $a > 0 \quad \Rightarrow \quad \arg z = \arctan \frac{b}{a}$
  $a < 0,\ b > 0 \quad \Rightarrow \quad \arg z = \pi + \arctan \frac{b}{a}$
  $a, b < 0 \quad \Rightarrow \quad \arg z = \arctan \frac{b}{a} - \pi$ (viz Gaussova rovina)

  Ty „tanečky“ s přičítáním a odečítáním π jsou v daných kvadrantech nezbytné zkrátka proto, že funkce arctan vrací jen hodnoty v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, což je ale přípustný argument pouze pro čísla s kladnou reálnou částí. Navíc má tento vzorec problém pro $a = 0$, což je sice případ, kdy je jasné, jaký je argument (opět, viz Obrázek 1), ale přesto je to něco, co by bylo třeba zohlednit např. při implementaci na počítači.

  Alternativně (a asi jednodušeji) také: $\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{a}{|z|}, & b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{|z|}, & b < 0. \end{cases}$

  Pozn.: Samozřejmě by to šlo i přes arcsin, ale opět bychom se, podobně jako u použití arctan, potýkali se třemi případy, u arccos jsou jen dva a liší se pouze znaménkem, a jelikož dělíme absolutní hodnotou, nemusíme se zde obávat ani dělení nulou jako u arctan[2]. Na druhou stranu, k použití vzorce s arccos je třeba spočítat absolutní hodnotu, pro arctan ne, záleží čistě na osobním pohledu, co je komu pro výpočet bližší.

  Další možností jak spočítat argument „bez kliček“, je zkrátka vzít v potaz, že zároveň musí být splněno $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$ a $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$ a vyčíst výsledný úhel z jednotkové kružnice (viz pomůcka od Ing. Mrovce: `https://homel.vsb.cz/~ulc0011/uhly.pdf`).

  Množinu Arg z pak dostaneme jednoduše jako Arg $z = \{\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$. Argument je důležitý za určitých okolností, jako je např. mocnění obecným komplexním číslem, nicméně

[2]Protože zjevně $|z| = 0$ platí pouze pro $z = 0$ a jak jsme si řekli, pro 0 není argument definován.

v drtivé většině případů budeme operovat pouze s hlavní hodnotou argumentu.

Platí, že $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \arg(z_1 z_2) \in \mathrm{Arg}\ z_1 \oplus \mathrm{Arg}\ z_2.$
Přímo psát $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ můžeme pouze pokud výsledek leží v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$, v opačném případě je třeba přičíst/odečíst příslušný násobek 2π.

- **Goniometrický a exponenciální tvar**:
  Zatím jsme si uvedli pouze **algebraický tvar**, tj. $z = a + bi$. Označme $\arg z = \varphi$. Pak můžeme psát

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \qquad (\textbf{goniometrický}\ \text{tvar})$$

$$z = |z|\mathrm{e}^{i\varphi} \qquad (\textbf{exponenciální}\ \text{tvar})$$

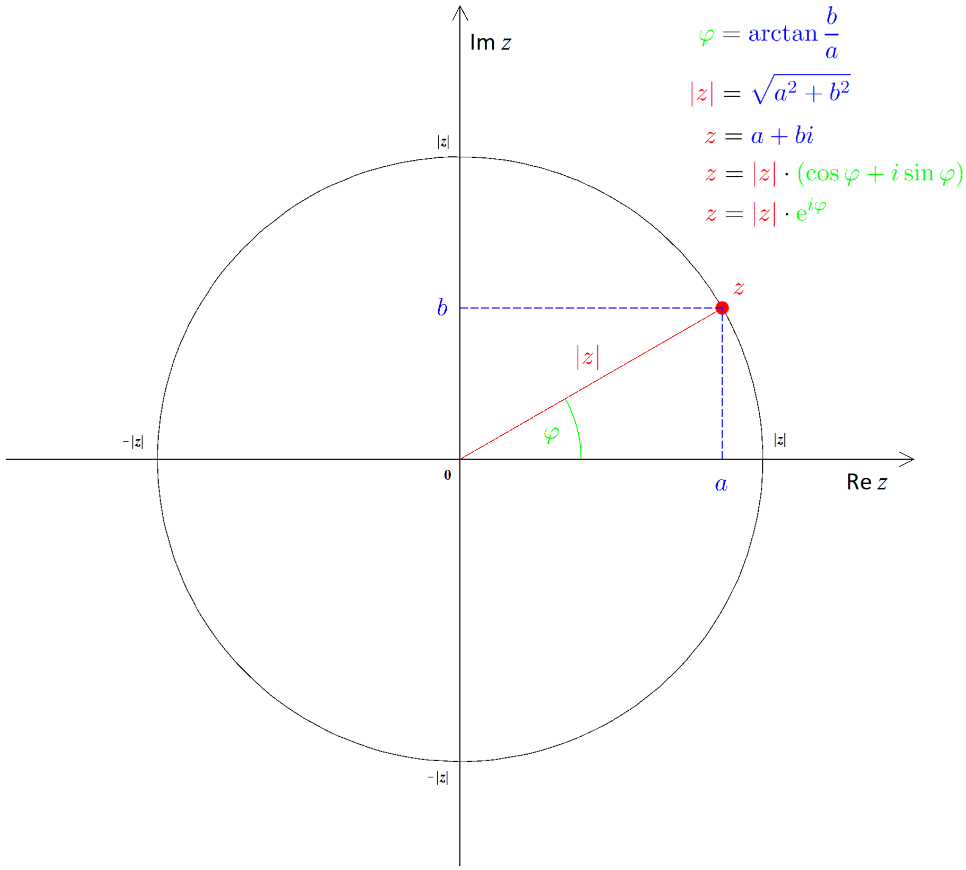
  Odtud mimo jiné plyne, že: $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = \mathrm{e}^{i\varphi}$.

- Z exponenciálního tvaru lze okamžitě vidět zmíněné $\arg(z_1 z_2) \in \mathrm{Arg}\ z_1 \oplus \mathrm{Arg}\ z_2$:

$$z_1 = |z_1|\mathrm{e}^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = |z_2|\mathrm{e}^{i\varphi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(|z_1|\mathrm{e}^{i\varphi_1}\right) \cdot \left(|z_2|\mathrm{e}^{i\varphi_2}\right) = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

  Mimo jiné to znamená, že pokud máme číslo w, pro které platí $|w| = 1$, $\arg w = \varphi$, tak násobení číslem w není nic jiného, než rotace o úhel φ kolem počátku.



Obrázek 1: Ilustrace v Gaussově rovině

Pozn. pro zájemce: Goniometrický tvar se ještě dá lehce vymyslet v rámci ilustrace pravoúhlým trojúhelníkem, ale kde se proboha vzalo nějaké „é na í“? Jak si to představit? V tuto chvíli (a v tomto kurzu) nevíme a nedozvíme se, jak jsou zavedeny funkce komplexní proměnné. Nicméně, už víme, jak se chovají celočíselné mocniny i, čili umíme i dosadit do polynomu. Co tedy takhle zkusit Taylorův polynom? Platí:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Pokud si uvědomíme, že cos obsahuje pouze sudé členy a sin pouze liché, v obou případech se střídají znaménka, a za x do Taylorova rozvoje dosadíme $i\varphi$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \dots \\
&= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right) \\
&= \cos\varphi + i\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

- **Moivreova věta:** $(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$.
  Toto tvrzení je zřejmé, máme-li k dispozici exponenciální tvar, bez něj se dá dokázat například matematickou indukcí.

- *Umocňování a odmocňování komplexních čísel* provádíme přes Moivreovu větu. Tzn. u mocnění je postup následovný:
  - Najdeme $|z|$ a φ (tj. $\arg z$),
  - Použijeme $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)^3$,
  - Výsledek, pokud možno, převedeme zpátky do algebraického tvaru.

$$\text{Např.:} \qquad z = 1 + i, \qquad z^8 = ?$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \varphi = \arctan\frac{1}{1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(\cos 0 + i\sin 0) = 16(1+0i) = \underline{\underline{16}}$$

U n-té odmocniny postupujeme analogicky, s drobnou odlišností:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Jinak řečeno, dostaneme obecně n různých řešení. To je dáno tím, že při mocnění násobíme úhly, tady úhel dělíme. A protože se svým způsobem motáme po kružnici, nestačí nám jen jedno řešení, abychom pokryli všechny možnosti. [4] K jasnějšímu pochopení nám může pomoci jednoduchá úvaha:

[3] A nezapomínejme, že $\forall k \in \mathbb{Z}: \sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2k\pi)$, totéž pro cosinus.

[4] Ostatně už u reálných čísel platí např. $\sqrt{4} = \pm 2$, a ne jen 2.

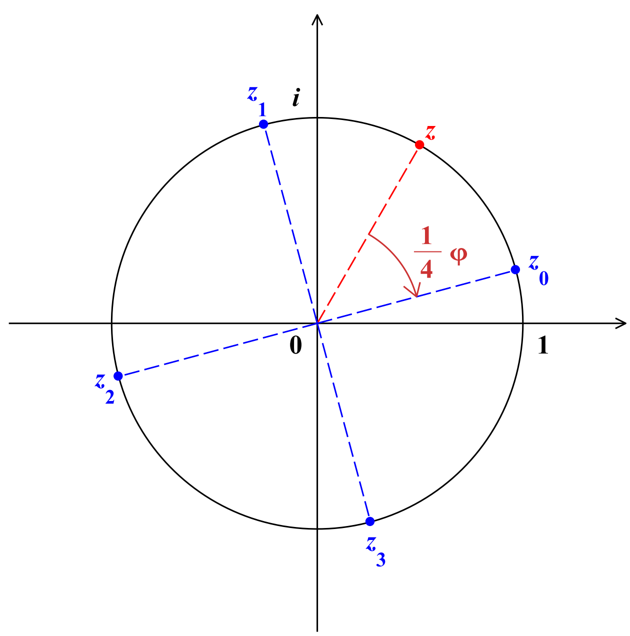
Když jsme na jednotkové kružnici v poloze, odpovídající úhlu 0 a někdo nám řekne „**Ztrojnásobte svůj úhel!**“, tak není moc co řešit, pořád budeme mít nulový úhel. Tato situace odpovídá umocnění na třetí. Ale co když někdo přijde a řekne „Posuňte se na úhel, **jehož ztrojnásobením se dostanete na svou současnou pozici**!“, což je situace odpovídající třetí odmocnině? Samozřejmě, opět můžeme zůstat stát na 0. Ale co takový úhel $\frac{2\pi}{3}$? Ten když ztrojnásobíme, dostaneme se na 2π, což je ale ta samá pozice jako 0. A takto lze uvažovat pro jakýkoliv úhel a jakýkoliv násobek.

Obecně pro argumenty všech řešení odmocniny platí

$$\arg z = \varphi, \quad \sqrt[n]{z} = \{z_0, \dots, z_{n-1}\} \qquad \Rightarrow \qquad \arg z_0 = \frac{\varphi}{n},$$

$$|\arg z_0 - \arg z_1| = |\arg z_1 - \arg z_2| = \dots = |\arg z_{n-2} - \arg z_{n-1}| = \frac{2\pi}{n},$$

jinak řečeno, odmocniny mají své argumenty **rovnoměrně rozmístěné**, což se dá znázornit pomocí jednotkové kružnice:[5]



Obrázek 2: Situace s odmocňováním pro $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad n = 4$

Př.: Spočítejme $\sqrt[4]{1}$:

[5]Absolutní hodnotu 1 chceme čistě pro větší přehlednost, aby z leželo na stejné kružnici jako jeho odmocniny.

$$|1| = 1, \qquad \arg 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{4}\right), \qquad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

$$
\begin{aligned}
k = 0: &\quad \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \tfrac{0+0}{4} + i \sin \tfrac{0+0}{4}\right) = 1 \cdot (1 + i \cdot 0) = 1,\\
k = 1: &\quad \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \tfrac{0+2\pi}{4} + i \sin \tfrac{0+2\pi}{4}\right) = 1 \cdot \left(\cos \tfrac{\pi}{2} + i \sin \tfrac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot (0 + i \cdot 1) = i,\\
k = 2: &\quad \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \tfrac{0+4\pi}{4} + i \sin \tfrac{0+4\pi}{4}\right) = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = 1 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -1,\\
k = 3: &\quad \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \tfrac{0+6\pi}{4} + i \sin \tfrac{0+6\pi}{4}\right) = 1 \cdot \left(\cos \tfrac{3\pi}{2} + i \sin \tfrac{3\pi}{2}\right) = 1 \cdot (0 + i \cdot (-1)) = -i,
\end{aligned}
$$

Takže $\underline{\underline{\sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\}}}$.

2 Základy maticového a vektorového počtu

- Uspořádanou n-tici čísel nazveme **n-rozměrným vektorem**. Tím se myslí, že záleží na pořadí prvků, např. vektor $[1, 2, 3]$ není stejný jako vektor $[1, 3, 2]$. Z pohledu datových struktur si tak vektor lze představit jako *pole*, jeho složky tedy můžeme jednoznačně určit pomocí **indexu** - pořadí ve vektoru. Např.

$$\mathbf{x} = [5, 8, 10], \qquad x_1 = 5,\ x_2 = 8,\ x_3 = 10.$$

- Množinu všech n-rozměrných reálných (popř. komplexních) vektorů značíme $\mathbb{R}^n$ (popř. $\mathbb{C}^n$), přičemž číslo n nazýváme **dimenzí** vektoru. Dva vektory jsou stejné, pokud mají stejnou dimenzi a stejné prvky na stejných pozicích. V dalším textu se, nebude-li řečeno jinak, zaměříme na reálné vektory.

- Vektory **stejné délky** můžeme sčítat a odečítat, a to po složkách, např. $[5, 8, 10]+[2, -6, 1] = [5 + 2, 8 - 6, 10 + 1] = [7, 2, 11]$. Vektory různé dimenze sčítat (ani odečítat) nelze.

- Vektor lze násobit číslem, v tu chvíli se tímto číslem přenásobí jednotlivě všechny složky. Např.: $3 \cdot [5, 8, 10] = [3 \cdot 5, 3 \cdot 8, 3 \cdot 10] = [15, 24, 30]$.

- Obecně rozlišujeme mezi **řádkovým** a **sloupcovým** vektorem. Určitě znáte z dřívejška, že vektory stejné dimenze lze mezi sebou skalárně násobit. Například, vezmeme-li vektory $\mathbf{u} = [1, 2, 3], \mathbf{v} = [4, 0, -1]$, pak jejich skalární součin[6] je roven

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 4 + 0 - 3 = 1.$$

  Obecněji,

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

  Formálně vzato skalární součin vektorů odpovídá působení **řádkového vektoru na sloupcový**, tzn.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \equiv \begin{bmatrix} u_1, & u_2, & \cdots & , u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

  Důležité je, že řádkový vektor je vlevo a sloupcový vpravo! Co by se stalo, kdyby to bylo naopak bude jasné za chvíli. Jinak u skalárního součinu obecně nezáleží na tom, který z vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vezmeme jako řádkový a který jako sloupcový, skalární součin vektorů je komutativní (tj. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$).

[6] Obecně je skalární součin sám o sobě mnohem obecnější koncept, než jak jej známe teď. K tomu se však dostaneme na jednom z posledních cvičení, pro tuto chvíli budeme pojem skalární součin chápat tak, jak jej známe ze střední školy, což je tzv. Euklidovský skalární součin.

- Operaci **transpozice** značíme horním indexem T. Tato operace dělá z řádkového vektoru sloupcový a naopak. Např.

$$\begin{bmatrix}1, & 2, & 3\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

- Pojmem **matice** o rozměrech $m \times n$ rozumíme „tabulku“ čísel, která má m řádků a n sloupců. Volně si ji můžeme vyložit jako sloupcový vektor dimenze m, jehož složkami jsou řádkové vektory dimenze n[7]. Opět, z pohledu datových struktur je to v zásadě *pravidelné dvourozměrné pole*, a tak nikoho nepřekvapí, že složky označujeme pomocí dvojice indexů - řádkového a sloupcového. Např.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}7 & -3 & 0\\11 & 13 & -9\end{bmatrix}, \quad a_{1,1} = 7,\ a_{1,2} = -3,\ a_{1,3} = 0,\ a_{2,1} = 11,\ a_{2,2} = 13,\ a_{2,3} = -9.$$

  Pozn.: Protože při konkrétních příkladech se určitě nepotkáme s maticemi, které by některou z dimenzí měly dvoumístnou, nebudeme pro jednoduchost mezi indexy prvků matice psát čárku, tj. budeme psát a_{11} místo $a_{1,1}$ apod.

- Množinu všech reálných matic o rozměrech $m \times n$ značíme $\mathbb{R}^{m,n}$, případně $\mathbb{R}^{m\times n}$. Jestliže $m = n$, nazýváme danou matici **čtvercová**.

- Stejně jako u vektorů, matici lze násobit číslem a to tak, že každý prvek tímto číslem vynásobíme, a matice stejných rozměrů lze sčítat a odečítat po složkách. Např.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}7 & -3 & 0\\11 & 13 & -9\end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\-8 & 4 & 10\end{bmatrix}$$

$$3 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix}3\cdot 7 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 0\\3\cdot 11 & 3\cdot 13 & 3\cdot(-9)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}21 & -9 & 0\\33 & 39 & -27\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix}7+1 & -3-1 & 0+3\\11-8 & 13+4 & -9+10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & -4 & 3\\3 & 17 & 1\end{bmatrix}.$$

- **Násobení matice a vektoru**: V základním případě uvažujeme, že maticí zleva násobíme sloupcový vektor. Proč? Matici totiž při násobení zleva můžeme chápat jako „vektor řádkových vektorů“. Zároveň jsme si řekli, že skalární součin vektorů lze chápat jako působení řádkového vektoru na sloupcový. Takže, když tyto dvě úvahy dáme dohromady, zjistíme, že výsledkem

[7] A samozřejmě by to šlo říct i naopak, řádkový vektor dimenze n, jehož složkami jsou sloupcové vektory dimenze m.

násobení matice (zleva) a vektoru bude sloupcový vektor skalárních součinů. Z toho je zároveň jasné, že aby se toto násobení dalo provést, musí mít matice stejně sloupců, jako má vektor složek (skalárně lze násobit jen vektory stejných rozměrů) a výsledný vektor bude mít tolik složek, kolik měla původní matice řádků (protože tolik skalárních součinů se provedlo). Označíme-li $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$ jako i-tý řádek matice $\mathbf{A}$, můžeme situaci stručně zapsat následovně:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{x} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}}\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Např.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 11 & 13 & -9 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}\mathbf{x}$ NELZE! Matice $\mathbf{A}$ má 3 sloupce, ale vektor $\mathbf{x}$ má pouze 2 složky.

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 11 & 13 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ 11 \cdot (-1) + 13 \cdot 2 + (-9) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 - 6 + 0 \\ -11 + 26 - 45 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -13 \\ -30 \end{bmatrix}}}$$

- Zcela analogicky můžeme zavést násobení matice řádkovým vektorem zprava. V tu chvíli musí mít naopak matice tolik řádků, kolik má vektor, jímž násobíme, složek. Výsledkem je tentokrát řádkový vektor, který má tolik složek, kolik měla původní matice sloupců. Ač to může celé znít trochu zmateně, nejpodstatnější je, že při násobení máme **řádek vlevo, sloupec vpravo, násobíme skalárně, abychom to mohli provést potřebujeme stejné rozměry. Kolikrát to můžeme provést, tolik bude výsledný rozměr.** Pokud se toto naučíme a především tomu porozumíme, za všech situací vymyslíme bez problémů sami, co s čím můžeme násobit a co bude výsledkem.
  Např.:

  $\mathbf{y}^T\mathbf{A}$ NELZE! Matice $\mathbf{A}$ má jen 2 řádky, ale vektor $\mathbf{y}^T$ má 3 složky.

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 11 & 13 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 11, & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 13, & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-9) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 29, & 23, & -18 \end{bmatrix}}}$$

Jak vidíme, u matic a vektorů NEMŮŽEME bezhlavě prohazovat pořadí násobení jako u čísel!

- Nyní umíme z obou stran násobit matici vektorem. Zbývá nám doplnit, jak se násobí matice s maticí. Pokud však opět budeme nad maticí uvažovat jako nad „vektorem složeným z vektorů“, zjistíme, že násobení matice s maticí není nic jiného, než opakované násobení matice s vektorem, kde jednotlivé vektory jsou sloupce matice vpravo, nebo případně řádky matice vlevo. Z předchozích pozorování u matic a vektorů není těžké dát dohromady, co platí:
  - ⋄ Matice vlevo musí mít stejně sloupců jako má matice vpravo řádků,
  - ⋄ pokud měla matice vlevo rozměry $m \times n$ a matice vpravo rozměry $n \times p$, pak má výsledná matice rozměry $m \times p$,
  - ⋄ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ obecně NENÍ TOTÉŽ jako $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Platí[8]

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,p}: \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} & \cdots & \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_p^{\mathbf{B}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} & \cdots & \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_p^{\mathbf{B}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} & \cdots & \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}}\mathbf{s}_p^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,p}$$

  Např.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 11 & 13 & -9 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

  Kvůli rozměrům matic NELZE násobit $\mathbf{AB}, \mathbf{BC}$.

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 0 + (-3) \cdot (-6) + 0 \cdot 2 & 7 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 11 \cdot 0 + 13 \cdot (-6) + (-9) \cdot 2 & 11 \cdot 1 + 13 \cdot 0 + (-9) \cdot 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 18 & 7 \\ -96 & -16 \end{bmatrix}}}.$$

  Ostatní kombinace si zkuste sami, viz Příklad 3.

- **Pozn.:** S přihlédnutím k předchozímu můžeme řádkový vektor délky n chápat jako matici o rozměrech $1 \times n$, a naopak sloupcový vektor délky n jako matici o rozměrech $n \times 1$. Takto vyzbrojeni už nyní můžeme říct, co by se stalo, kdyby při násobení vektorů byl sloupcový vlevo a řádkový vpravo: **vznikla by matice**! Takovémuto součinu vektorů se občas říká **vnější součin** (což je analogie k tomu, že skalárnímu součinu se občas říká **vnitřní** součin).

- Násobení matic je **asociativní**, tj., máme-li součin tří (nebo více) matic, můžeme si násobení „libovolně ozávorkovat“. Symbolicky $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, takže při součinu tří matic si můžeme vybrat, jestli první vynásobíme prostřední a pravou, nebo levou a prostřední, výsledek se nezmění.

[8] Krom označení $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$ jakožto i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ označujme pomocí $\mathbf{s}_j^{\mathbf{A}}$ pro změnu j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$.

- Transpozicí matice rozumíme výměnu jejích řádků za sloupce, tedy „překlopení podle diagonály“. Symbolicky zapsáno $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = \mathbf{s}_i^{\mathbf{A}^T}$, případně $a_{ij} = a_{ji}^T$. Zřejmě, pokud $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, pak $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n,m}$. Jestliže platí $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, nazveme matici $\mathbf{A}$ **symetrická**. O transpozicích platí:
  - ◇ $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
  - ◇ $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
  - ◇ $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
  - ◇ $\mathbf{AA}^T$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ jsou symetrické matice.

  Jako cvičení se můžete pokusit ukázat, že výše uvedené výroky skutečně platí.

  Pozn.: Pokud platí $\mathbf{AA}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$, říkáme o matici $\mathbf{A}$, že je **normální**.

- Čtvercovou matici $\mathbf{I}$, pro kterou platí $i_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$, tzn.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

  nazýváme **jednotkovou maticí**. Označením $\mathbf{I}_n$ budeme, pokud to bude pro kontext důležité, značit jednotkovou matici rozměrů $n \times n$, jinak ji budeme značit prostě $\mathbf{I}$. Tato matice plní při násobení matic a vektorů stejnou úlohu, jako číslo 1 u klasického násobení čísel - násobením s jednotkovou maticí objekt nijak nezměníme. Samozřejmě, stále platí, že musí sedět rozměry matic a vektorů, aby operace dávala smysl:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 11 & 13 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 11 & 13 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 11 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

  Obecně tedy pro libovolný sloupcový vektor platí $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$, pro libovolný řádkový vektor platí $\mathbf{yI} = \mathbf{y}$, a pro libovolnou matici rozměrů $m \times n$ platí $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{AI}_n = \mathbf{A}$.

- Je zřejmé, že násobit matici samu se sebou (tj. provést $\mathbf{AA}$) lze pouze v případě, že se jedná o čtvercovou matici. V tu chvíli můžeme podobně jako u čísel zavést mocnění matic jako opakované násobení, tj. $\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{k-\text{krát}}$, a $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$.

- U násobení matic a vektorů se dá „vytýkat“, jen si musíme na rozdíl od čísel dát pozor, jestli vytýkáme zleva nebo zprava (protože u matic záleží na pořadí, ve kterém se násobí). Např. $\mathbf{BA}^3\mathbf{C} - \mathbf{A}^2\mathbf{C} = (\mathbf{BA}^3 - \mathbf{A}^2)\mathbf{C} = (\mathbf{BA} - \mathbf{I})\mathbf{A}^2\mathbf{C}$.

3 Soustavy lineárních rovnic, řešitelnost, eliminační metody

- Uvažme soustavu dvou lineárních rovnic o neznámých a, b:

$$\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 4 \\ 4a & - & b & = & 1 \end{array}$$

Pokud bychom takovouto soustavu chtěli vyřešit „klasicky", nabízelo by se obě rovnice sečíst, čímž bychom dostali rovnici $5a = 5$, okamžitě bychom viděli, že $a = 1$ a dosazením např. do první rovnice bychom dostali, že $b = 4 - a = 4 - 1 = 3$. Trochu hůře bychom se orientovali v situaci, kde bychom měli např. 4 rovnice o 4 neznámých, nebo dokonce víc. Nabízí se otázka, jak takovýto problém řešit systematicky.

Všimněme si, že výše uvedenou soustavu rovnic lze zapsat maticově:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Připomeňme, že vlevo vyjde násobením matice a vektoru opět vektor, a vektory na obou stranách se budou rovnat právě tehdy, pokud budou mít stejné složky. Sami si můžete ověřit vynásobením matice s vektorem na levé straně a porovnáním s vektorem napravo, že skutečně dostaneme výše uvedenou soustavu rovnic. Dále si můžeme napsat tzv. **rozšířenou matici soustavy**, která vznikne jednoduše tak, že k matici zprava „připlácneme" vektor pravé strany, což by v našem případě vypadalo takto:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Za chvíli si ukážeme, jak z rozšířené matice získat řešení. Zaměříme se zatím pouze na čtvercové matice (tedy soustavy n rovnic o n neznámých).

- **Elementární řádkové úpravy** jsou v maticích 3:
  - ◇ Násobení(popř. dělení) řádku nenulovým číslem,
  - ◇ vyměňování řádků a
  - ◇ přičítání násobku jednoho řádku ke druhému.

Tyto operace v zásadě odpovídají tomu, co děláme při klasickém řešení: Když chci „vynulovat" některou proměnnou, přičítám/odečítám násobky jednotlivých rovnic se sebou, to odpovídá právě první a třetí operaci. Operace druhá je pro nás důležitá, abychom bez obtíží mohli „automatizovat" postup při řešení soustavy.

- **Horní trojúhelníková matice** (někdy též matice ve schodovém tvaru) je taková matice, pro jejíž prvky platí $i > j \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = 0$. Jinak řečeno, je to matice, která má pod diagonálou pouze nulové prvky (což neznamená, že nemůže mít nulové prvky i jinde). Jinak řečeno, chceme, aby sloupcový index prvního nenulového prvku na každém řádku byl větší, než na řádku předchozím, tedy, aby nulové prvky v matici formovaly „schody“. Např.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ je horní trojúhelníková matice.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ je také horní trojúhelníková matice.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ NENÍ horní trojúhelníková matice.}$$

  Naším úkolem bude pomocí úprav dostat matici soustavy na horní trojúhelníkovou, s tím, že společně s maticí budeme stejně upravovat i pravou stranu (tedy se bude dít přičítání rovnic k sobě). Proč právě na horní trojúhelníkovou? Inu, v posledním řádku nám zůstane jedna (nebo žádná) neznámá. O řádek výš budou nanejvýš dvě. O další řádek výš budou nanejvýš tři, atd. Jinými slovy, z posledního řádku (tj. poslední vzniklé rovnice) můžeme hned určit poslední neznámou. Dosazením o řádek výš dostaneme druhou neznámou. Dosazením obou o další řádek výš okamžitě dostaneme třetí neznámou...

- Samotný algoritmus pro nalezení vektoru neznámých vypadá takto:

  1. Zapíšeme si rozšířenou matici soustavy.
  2. Pomocí elementárních řádkových úprav se snažíme rozšířenou soustavu upravit tak, aby byla původní matice horní trojúhelníková. To děláme tak, že postupně nulujeme všechny prvky pod diagonálou - tj. nejprve vynulujeme všechny prvky prvního sloupce, kromě a_{11}. Poté nulujeme prvky druhého sloupce pod a_{22}, poté podobně se třetím sloupcem atd. Pokud by se stalo, že v danou chvíli máme na diagonále nulový prvek, pomůžeme si výměnou řádků (samozřejmě, pokud jsou i pod tímto prvkem již samé nuly, tak je to zbytečné). Tomuto postupu se říká **dopředná redukce**.
  3. Pokud nám tímto postupem vyjde na posledním řádku jediný nenulový prvek, má soustava právě jedno řešení. například, bude-li poslední řádek rozšířené soustavy mít

podobu $\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & | & 6\end{bmatrix}$, dostáváme okamžitě, že poslední neznámá $x_n = \frac{6}{3} = 2$. Když známe tuto neznámou, tak řetězovitě postupně dosazujeme vždycky o řádek výš, z čehož dostaneme pokaždé další neznámou, až nakonec získáme všechny. Tomuto kroku se říká **zpětná substituce**.

4. **Pokud vyjde poslední řádek nulový celý**, tak záleží, co se objevilo na pravé straně - pokud tam je **nenulové číslo, tak soustava nemá řešení** (protože nula se nemůže rovnat něčemu nenulovému). **Pokud je tam také nula, má soustava nekonečně mnoho řešení**. V tu chvíli položíme neznámou z daného řádku rovnu parametru, třeba $x_n = t \in \mathbb{R}$. A od tohoto bodu opět provádíme zpětnou substituci, dostaneme vektor neznámých, závisející na parametru t. Samozřejmě parametrů může být i více, jejich počet odpovídá počtu nulových řádků.

Celému uvedenému algoritmu se říká **Gaussova eliminační metoda**.

- **Př.:** Vyřešme níže uvedenou soustavu rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 13 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \end{array}$$

Nejprve si zapíšeme rozšířenou soustavu, jinými slovy zkrátka opíšeme čísla, která vidíme, a místo rovná se uděláme svislou čáru:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 13 \\ 5 & 5 & 2 & 9 \\ 5 & 4 & 3 & 10 \end{array}\right]$$

Nyní budeme pomocí elementárních úprav nulovat prvky pod diagonálou:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \color{blue}{1} & \color{blue}{1} & \color{blue}{6} & \color{blue}{13} \\ \color{red}{5} & 5 & 2 & 9 \\ \color{red}{5} & 4 & 3 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \color{red}{-5\mathbf{r}_1} \\ \color{red}{-5\mathbf{r}_1} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 13 \\ 5 - \color{red}{5}\cdot\color{blue}{1} & 5 - \color{red}{5}\cdot\color{blue}{1} & 2 - \color{red}{5}\cdot\color{blue}{6} & 9 - \color{red}{5}\cdot\color{blue}{13} \\ 5 - \color{red}{5}\cdot\color{blue}{1} & 4 - \color{red}{5}\cdot\color{blue}{1} & 3 - \color{red}{5}\cdot\color{blue}{6} & 10 - \color{red}{5}\cdot\color{blue}{13} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & -28 & -56 \\ 0 & -1 & -27 & -55 \end{array}\right]$$

Nyní vidíme, že druhým řádkem nemůžeme nulovat, protože je na diagonále nula. Naopak ve třetím řádku ve druhém sloupci nula není, takže vyměníme druhý a třetí řádek:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 13 \\ 0 & -1 & -27 & -55 \\ 0 & 0 & -28 & -56 \end{array}\right]$$

A nyní jsme v zásadě hotoví, neboť **„nalevo od čáry" máme horní trojúhelníkovou matici**. Z posledního řádku máme $-28x_3 = -56 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_3 = 2}$. Dosadíme do druhého řádku, čímž dostáváme

$$-x_2 - 27x_3 = -55 \quad \Rightarrow \quad -x_2 = -55 + 27x_3 = -55 + 27 \cdot 2 = -55 + 54 = -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_2 = 1}.$$

A konečně, dosazením obou nalezených neznámých do první rovnice získáme x_1:

$$x_1 + x_2 + 6x_3 = 13 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 13 - x_2 - 6x_3 = 13 - 1 - 6 \cdot 2 = \underline{\ 0\ }$$

Takže zadaná soustava má řešení $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, nebo jinak řečeno, vektor řešení dané soustavy je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- **Př.:**

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +2\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -2 + 2 \cdot 1 & 2 + 2 \cdot (-1) & -4 + 2 \cdot 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vyšel nám zcela nulový řádek, takže klademe $\underline{x_2 = t} \in \mathbb{R}$. Dosazením do první rovnice dostáváme

$$x_1 - x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 + x_2 = \underline{2 + t},$$

řešením soustavy je tedy vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 + t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Jelikož t může být jakékoliv, popisuje výsledný vektor nekonečně mnoho různých řešení.

- **Př.:**

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +2\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -2 + 2 \cdot 1 & 2 + 2 \cdot (-1) & -4 + 2 \cdot 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

V posledním řádku nám sice vyšly samé nuly vlevo od čáry, ale napravo je číslo 2. Jelikož určitě nemůže platit $0 = 2$, soustava <u>nemá řešení.</u>

- **Pozn.:** Řekli jsme si, jak postupovat, když nám vyjde nulový řádek. Co se ale stane, když bude nulová pravá strana (tzv. **homogenní**)? Stačí se zamyslet. Jakýmkoliv sčítáním a odečítáním řádků se nic nezmění na tom, že vpravo jsou nuly, takže nula bude vpravo jistě i na posledním řádku po úpravě na schodový tvar. To ale znamená, že soustava s nulovou pravou stranou určitě bude mít řešení! Proč? Pokud vlevo bude nějaké nenulové číslo, máme, že $x_n = 0$ (**dokonce všechny neznámé budou nulové**). Pokud je tam nula, tak víme, že soustava má nekonečně mnoho řešení. Sečteno podtrženo, **soustava s nulovou pravou stranou má buď triviální (nulové) řešení, nebo nekonečně mnoho řešení.** Otázka, kdy matice dává právě jedno triviální nebo nekonečně mnoho řešení pro nulovou pravou stranu závisí na tom, zda je či není daná matice tzv. **singulární**. K tomu více na následujícím cvičení.

- Soustavy můžeme řešit i s neznámým parametrem, zda a jaké řešení soustava má pak závisí na volbě parametru:

Př.:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ p & 3 & p+6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -p\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3-p & 6-2p \end{array}\right].$$

Kolik má soustava řešení záleží na tom, jestli budou v posledním řádku samé nuly, samé nuly jen vlevo od čáry, nebo na obou stranách bude nenulové číslo. Vidíme, že pro $p = 3$ dostaneme na obou stranách nuly a soustava tak bude mít nekonečno řešení. Pro jakékoliv jiné p vyjde, že $x_2 = 2$. Že by vlevo byly nuly a vpravo nenulové číslo v tomto případě nastat nemůže.

- Uvedený postup se dá ještě rozšířit: Nezastavíme se u horní trojúhelníkové matice, ale pokračujeme v úpravách, kde pro změnu „odspodu zprava“ nulujeme prvky NAD diagonálou. To má samozřejmě smysl pouze v případě, že soustava má právě jedno řešení (tj. vyjde nenulový koeficient na posledním řádku). Tímto postupem dostaneme nalevo diagonální matici, jinak řečeno jsme schopni přímo určit libovolnou neznámou. Této modifikaci říkáme **Gauss-Jordanova eliminační metoda**.

- **Př.:**

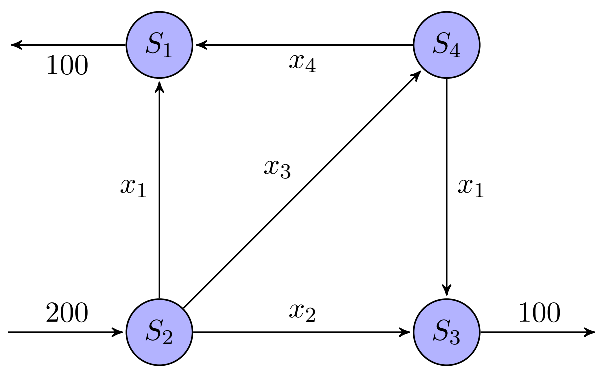
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & -3 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & = & 6 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -5\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 21 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 21 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 4 \\ x_2 & = & 7. \end{array}$$

- Pokud bychom odhlédli od čtvercových soustav, mohou nastat dvě situace: Soustava může být takzvaně **nedourčená**, tedy bude více neznámých než rovnic (a matice bude „širší než delší“). V takovou chvíli si jednoduše tolik proměnných, kolik nám „nadbývá“ položíme rovno parametrům a soustavu pak řešíme klasicky úpravou na schodový tvar.

  V případě, že je soustava naopak **přeurčená**, máme více rovnic než neznámých. To by se sice mohlo zdát jako výhoda, nicméně abychom si rozumně mohli vybrat ty rovnice, které nás dovedou k řešení, musíme znát hodnost a jádro matice. Jinak by se totiž mohlo stát, že si vybereme „nevhodnou“ kombinaci rovnic a bude nám chybět nějaká informace. K tomuto tématu (hodnost, jádro apod.) se dostaneme na pozdějších cvičeních.

- **Př.:** Pokusme se najít objemy jednotlivých (jednosměrných, tj. nezáporných) toků x_1, x_2, x_3, x_4, aby byla síť na obrázku 3 funkční.



Obrázek 3: Model distribuční sítě

Chceme aby bylo putování maximálně využito, tedy aby v uzlech nic zbytečně nezůstávalo. To neznamená nic jiného, než že „input = output“. Z každého uzlu tak dostaneme rovnici (rovnou převedeme neznámé nalevo a čísla napravo):

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
S_1: & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 100 \\
S_2: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 200 \\
S_3: & x_1 & + & x_2 & & & & & = & 100 \\
S_4: & x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0
\end{array}
$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení (zkuste si sami), konkrétně

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 100 - t \\ t \\ 100 \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R},
$$

takže známe přesně vzájemné rozložení toků. Budeme-li chtít například maximalizovat tok x_1, tak vidíme, že je třeba položit $t = 0$ (záporné t nemůžeme, protože toky x_2, x_4 by byly také záporné, což nemá při jednosměrném provozu smysl). A konkrétní toky by tak měly hodnotu $x_1 = 100, x_2 = 0, x_3 = 100, x_4 = 0$. Samozřejmě by se dalo podobně uvažovat u maximalizace/minimalizace kteréhokoliv toku.

- **Př.:** Najděte kvadratickou funkci f tak, aby platilo $f(-1) = 0, f(1) = -10, f(4) = 5$.

Ačkoliv by se to na první pohled nemuselo zdát, tento problém také vede na soustavu lineárních rovnic. Obecná kvadratická funkce má tvar $f(x) = ax^2 + bx + c$, abychom ji určili, potřebujeme nalézt koeficienty a, b, c. Nyní, když vezmeme první informaci $f(-1) = 0$, tak není nic snazšího, než za x dosadit do obecného předpisu. Dostáváme

$$\begin{array}{ccccccc} a(-1)^2 & + & b(-1) & + & c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & 0 \end{array}$$

Nyní totéž udělejme se druhými dvěma informacemi:

$$f(1) = -10 : \qquad \begin{array}{ccccccc} a \cdot 1^2 & + & b \cdot 1 & + & c & = & -10 \\ a & + & b & + & c & = & -10 \end{array}$$

$$f(4) = 5 : \qquad \begin{array}{ccccccc} a \cdot 4^2 & + & b \cdot 4 & + & c & = & 5 \\ 16a & + & 4b & + & c & = & 5 \end{array}$$

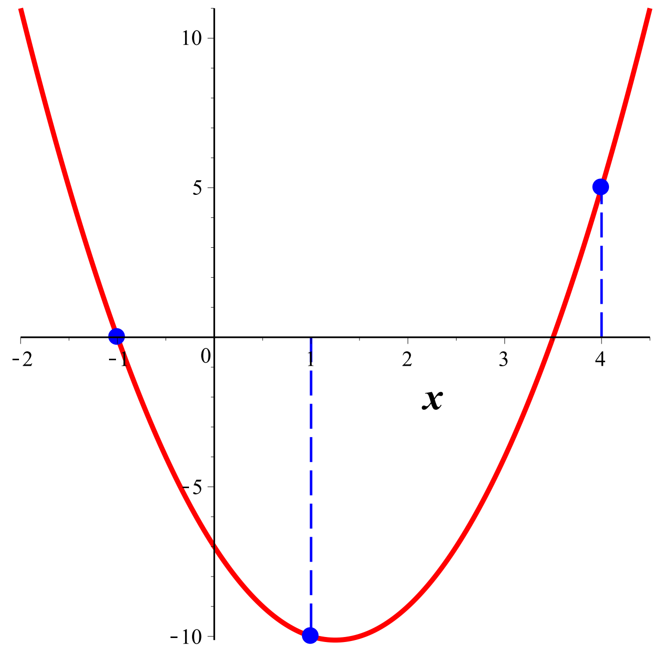
Jinak řečeno, dostali jsme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & -10 \\ 16a & + & 4b & + & c & = & 5, \end{array}$$

kterou můžeme řešit pomocí Gaussovy nebo Gauss-Jordanovy metody:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -10 \\ 16 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\mathbf{r}_1 \\ -16\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 20 & -15 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -10\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -15 & 105 \end{array}\right],$$

odkud už snadno zjistíme, že $c = -7, b = -5$ a $a = 2$, takže hledaná funkce, která prochází danými body má tvar $f(x) = 2x^2 - 5x - 7$. Na obrázku níže vidíme, že funkce skutečně zadanými body prochází:



Mimochodem, vyšlo nám právě jedno řešení, takže vidíme, že kvadratická funkce je jednoznačně dána trojicí (různých) bodů v rovině. Úplně stejně to funguje pro libovolný polynom n-tého stupně, který je jednoznačně zadán $n+1$ body.

4 Transformační matice, inverzní matice, LU rozklad

- Minule jsme při řešení soustav rovnic používali na rozšířenou matici soustavy *elementární řádkové úpravy*. Ukažme si, že tyto operace odpovídají přenásobením speciální maticí.

- Připomeňme, že **jednotkovou maticí I** rozumíme čtvercovou matici, která má na diagonále samé jedničky a jinde nuly. Pro libovolnou matici **A** (čtvercovou stejných rozměrů) platí **AI** = **IA** = **A**. Nyní se podívejme na součin

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že matice nalevo je „skoro jednotková“, jen má na první diagonální pozici dvojku místo jedničky. Což se dá také říct tak, že je to jednotková matice, která má **první řádek vynásobený dvojkou**. A co se při tomto násobení stane? Zkusme si to:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Vidíme, že výsledná matice je stejná, jako byla matice vpravo, ale **také má vynásobený první řádek dvojkou**. Právě jsme pomocí přenásobení matice modifikovanou jednotkovou maticí provedli elementární řádkovou úpravu.

- Obecně to funguje podle stejné myšlenky - každá elementární řádková úprava odpovídá přenásobení ZLEVA jednotkovou maticí, na níž tuto úpravu provedeme. Těmto upraveným jednotkovým maticím se někdy říká **transformační matice**. Pokud bychom např. chtěli pomocí násobení realizovat výměnu řádků, vyměníme příslušné řádky v jednotkové matici a po jejím působení se řádky vymění i ve výsledku. Například, budu-li chtít pomocí násobení zapsat výměnu druhého a třetího řádku v trojrozměrné matici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{r}_2 \\ \updownarrow \\ \mathbf{r}_3 \end{matrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \color{red}{2} & \color{red}{0} & \color{red}{5} \\ \color{blue}{4} & \color{blue}{-2} & \color{blue}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \color{blue}{4} & \color{blue}{-2} & \color{blue}{3} \\ \color{red}{2} & \color{red}{0} & \color{red}{5} \end{bmatrix}.$$

Pokud budeme chtít odečíst dvojnásobek prvního řádku od druhého:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2\mathbf{r}_1 \\ \\ \end{matrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vidíme tedy, že pokud při úpravě matice $\mathbf{A}$ na horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{U}$ provedeme obecně n řádkových úprav, tak skrytě neděláme nic jiného, než násobení matic, tj.

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}_n\mathbf{T}_{n-1}\cdots\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{A},$$

kde matice $\mathbf{T}_k$ odpovídá k-té úpravě. Označíme-li si stručně $\mathbf{T} = \mathbf{T}_n\mathbf{T}_{n-1}\cdots\mathbf{T}_3\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$, tak vidíme, že úprava na horní trojúhelníkovou matici je v zásadě pouze transformace matice $\mathbf{A}$ pomocí matice $\mathbf{T}$.

- Pokud bychom netransformovali zleva, ale **zprava**, prováděli bychom tytéž operace **na sloupcích**.

- Již víme, že Gaussova eliminační metoda spočívala v úpravě matice na horní trojúhelníkovou. Pokud v matici nevyšly čistě nulové řádky, mohli jsme také pokračovat v úpravách až na diagonální matici, což byla Gauss-Jordanova eliminační metoda. V této situaci jsme měli za čarou pravou stranu soustavy. Nicméně, mohli jsme samozřejmě vzít více pravých stran najednou a postupovat úplně stejně, přičemž bychom řešili více soustav naráz:

$$I.\quad \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \end{array} \qquad\qquad II.\quad \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{array}$$

Vidíme, že máme dvě stejné soustavy, lišící se pouze pravou stranou, můžeme je řešit zároveň:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Pokud bychom nyní chtěli vyřešit soustavu $I.$, vzali bychom pro zpětnou substituci jednoduše sloupec na pravé straně, který patřil k této soustavě, a hned bychom zjistili, že $x_1 = 0, x_2 = 1$. Kdybychom chtěli řešit soustavu $II.$, vzali bychom druhý sloupec pravé strany a zjistili $x_1 = -1, x_2 = 2$. Podstatou je, že když máme soustavu se stejnou maticí **nemusíme zbytečně dělat řádkové úpravy opakovaně pro každou soustavu zvlášť**.

- V předchozím příkladu jsme viděli, že můžeme vzít více pravých stran, tedy v zásadě mít napravo další matici, nejen vektor. A co by se stalo, kdybychom vpravo od čáry vzali konkrétně jednotkovou matici? V podstatě bychom si vpravo zaznamenávali transformace, které nás dovedly k upravené matici vlevo! Tento nápad je klíčový při hledání tzv. **inverzní matice**:

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Pokud existuje matice $\mathbf{A}^{-1}$ taková, že $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, říkáme o matici $\mathbf{A}$, že je **regulární** a o matici $\mathbf{A}^{-1}$ hovoříme jako o **matici inverzní k matici A**.

- Jak inverzi nalézt jsme si již naznačili, shrňme si myšlenku:
  - ◇ Napíšeme si rozšířenou matici, kde vlevo od čáry dáme $\mathbf{A}$ a vpravo $\mathbf{I}$,
  - ◇ matici vlevo upravujeme ne na horní trojúhelníkovou, ale **na jednotkovou matici**,
  - ◇ výsledná transformační matice vpravo je hledanou inverzí.

  Pokud se stane, že na jednotkovou matici upravit nemůžeme, protože vznikají nulové řádky, inverze neexistuje a matici $\mathbf{A}$ pak nazýváme **singulární**. Všimněme si: Je-li matice regulární, má soustava s ní právě jedno řešení, je-li singulární, tak buď žádné nebo nekonečně mnoho.

- **Př.:**[9]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = ?$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ {\color{red}2} & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ {\color{red}-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2\mathbf{r}_1 \\ +\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & {\color{red}1} & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ +\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{4}\mathbf{r}_3 \end{array} \sim$$

(Vidíme, že nevyšel řádek, kde by nalevo od čáry byly samé nuly, matice tedy inverzi má)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & {\color{red}3} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -3\mathbf{r}_3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & {\color{red}1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \begin{array}{c} +\mathbf{r}_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-1)\cdot\mathbf{r}_2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right],$$

nyní vidíme, že nalevo jsme konečně dostali jednotkovou matici, takže napravo je výsledná inverze:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

[9] Pro přehlednost budu červeně značit prvky, které se dalším krokem chystám vynulovat.

- Inverzní matice se dají použít k řešení soustav: Budeme-li mít soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, můžeme to chápat jako maticovou rovnici a tu zleva přenásobit maticí $\mathbf{A}^{-1}$ (pokud tato existuje). Dostaneme $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Máme-li tedy inverzi, můžeme okamžitě dostat řešení soustavy vynásobením s pravou stranou. Jelikož hledání inverze je ale poměrně pracné, vyplatí se to převážně v situacích, kdy máme více pravých stran.

- Inverze a jejich vlastnosti jsou důležité v hlubších oblastech, zejména numerické analýze. Nicméně, až budeme brát lineární zobrazení, uvidíme, že tato se dají napsat pomocí matic. Zpětná zobrazení jsou pak reprezentována právě inverzními maticemi. Jeden primitivní příklad za všechny: Rotace bodu $[x, y]^T$ v rovině kolem počátku o úhel φ se dá realizovat tím, že bod vynásobíme maticí[10]

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Zpětnou rotaci bychom pak dostali (mimo jiné) pomocí inverze k této matici. K dalším příkladům si včas něco řekneme na pozdějších cvičeních u lineárních zobrazení nebo později u determinantů.

- Pokud při úpravách nedojdeme až k jednotkové matici, ale zastavíme se u horní trojúhelníkové matice $\mathbf{U}$, budeme mít vpravo *dolní* trojúhelníkovou matici $\tilde{\mathbf{L}}$, tzn.:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \sim \text{elementární řádkové úpravy} \sim [\mathbf{U}|\tilde{\mathbf{L}}].$$

Jinými slovy, budeme v situaci $\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{A} = \mathbf{U}$, pokud označíme $\tilde{\mathbf{L}}^{-1} = \mathbf{L}$, máme

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU},$$

kde $\mathbf{L}$ je opět dolní trojúhelníková (rozmyslete si) a $\mathbf{U}$ horní trojúhelníková. Takovémuto zápisu matice $\mathbf{A}$ se říká **trojúhelníkový rozklad**, případně **LU rozklad**.

- Využití **LU** rozkladu je několik, jedno je stejně jako u inverze řešení soustavy s proměnlivou pravou stranou:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}\underbrace{\mathbf{Ux}}_{=\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

Řešením soustavy $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ získáme neznámý vektor $\mathbf{y}$, řešením další soustavy $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ pak konečně získáme hledaný vektor $\mathbf{x}$.

- U **LU** rozkladu a jeho využití k řešení soustav se nicméně nabízí několik otázek:

[10]Pozorný čtenář si možná všimne blízké souvislosti s komplexními čísly a rotacemi v Gaussově rovině.

– Je **LU** rozklad jednoznačný?

Rozhodně ne, už z principu kdykoliv vynásobím jednu z matic v rozkladu číslem α a tu druhou jím vydělím, dostanu nový rozklad. Nicméně odlišnost může být i výraznějšího charakteru, obecně je každopádně nekonečně mnoho možných **LU** rozkladů.

– Inverzi lze hledat jen pro regulární matice. Co **LU** rozklad?

LU rozklad lze hledat i pro singulární matice, jediným důsledkem je, že matice **U** je pak také singulární. Matice **L**, jelikož se hledá jako inverze, je vždy z principu regulární.

– Řešení soustavy **LU** rozkladem vypadá absurdně složitě. Místo abych řešil jednu soustavu, tak řeším dvě, navíc potřebuju k nalezení **L** počítat inverzi. Není lepší řešit soustavu rovnou, případně rovnou použít násobení inverzí k **A**?

Řešit soustavu rovnou bude samozřejmě lepší, pokud máme jednu soustavu s pevnou pravou stranou. Pokud však máme proměnlivou pravou stranu, je **LU** rozklad na operace úspornější, než přímo hledat inverzi, ačkoliv to nemusí být na první pohled patrné. Nezapomeňme, že **L** se sice určuje jako inverze, ale inverze k *trojúhelníkové* matici, která je prakticky „zadarmo“. Pak sice ještě musíme řešit dvě soustavy místo jedné původní, ale opět - obě soustavy jsou s trojúhelníkovou maticí, tedy vůbec již nemusíme provádět eliminaci, stačí postupně vyjadřovat výsledné neznámé.

- Nicméně, aby matice **L** byla dolní trojúhelníková, nesmíme při úpravě původní matice vyměňovat řádky. Jak si poradit, když je něco takového nutné? **Vyměníme sloupce**. Tuto výměnu si pak zaznačíme bokem do tzv. *permutační* matice **P** (zkrátka stejným způsobem vyměníme sloupce v jednotkové matici) a výsledný rozklad nebude $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, nýbrž $\mathbf{A} = \mathbf{LUP}$. Schéma řešení soustavy s takovýmto rozkladem je nicméně totožné jako jen s **LU**, jen musíme na konci přepermutovat vektor řešení maticí **P**, aby odpovídalo pořadí.[11]

- **Př.:** Určete **LU(P)** rozklad matice **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Řešení: Ihned vidíme, že je třeba prohodit např. první a druhý sloupec, abychom mohli začít s úpravami, tento krok si tedy zaznačíme do matice **P** tak, že prohodíme první a

[11] Jinými slovy nalezený vektor vynásobit maticí **P**. Není totiž těžké si rozmyslet, ž **P** je inverzí sama k sobě.

druhý sloupec v jednotkové matici:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Nyní můžeme začít hledat matice $\mathbf{U}$ a $\tilde{\mathbf{L}}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -5\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -4\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -16 \end{matrix}}_{\mathbf{U}} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \end{matrix}}_{\tilde{\mathbf{L}}}$$

Nyní stačí nalézt inverzi k $\tilde{\mathbf{L}}$ a máme rozklad nalezen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ +5\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ +4\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right],$$

takže

$$\mathbf{A} = \mathbf{LUP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5 Vektorové prostory a podprostory

- Představme si jakoukoliv množinu V, na níž je definováno sčítání prvků (kterým říkáme vektory) a jejich násobení číslem (skalárem). Abychom se na tyto operace opravdu mohli dívat jako na sčítání a násobení číslem, je třeba aby tyto operace splňovaly několik základních vlastností, které lze u podobné struktury předpokládat. Těmto vlastnostem se říká **axiomy** a jsou následující:

  1. $\forall u, v \in V: \quad u + v = v + u$, tzn. u sčítání nezáleží na pořadí.
  2. $\forall u, v, w \in V: \quad (u+v)+w = u+(v+w)$, tzn. při delším součtu nezáleží, co sečtu dřív.
  3. $(\exists o \in V)(\forall u \in V): \quad u+o = o+u = u$, tj. existuje neutrální prvek vzhledem ke sčítání (**nulový prvek**).
  4. $(\forall u \in V)(\exists(-u) \in V): -u+u = u+(-u) = o$, tj. ke každému prvku existuje „opačný“ prvek (vzhledem ke sčítání).
  5. $\forall u \in V: \quad 1 \cdot u = u$, tzn. když něco vynásobím jedničkou, nezměním to.
  6. $(\forall u, v \in V)(\alpha \in \mathbb{R}): \quad \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v.$
  7. $(\forall u \in V)(\alpha, \beta \in \mathbb{R}): \quad (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$, tj. tento a předchozí axiom říkají, že můžeme roznásobovat.
  8. $(\forall u \in V)(\alpha, \beta \in \mathbb{R}): \quad \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, tj. nezáleží zda postupně čísly násobíme, nebo je nejprve násobíme spolu.

  Jsou-li všechny tyto vlastnosti splněny, pak V spolu s operacemi sčítání a násobení skalárem nazýváme **vektorovým prostorem**. Tato skutečnost se často značí $(V, +, \cdot)$, ale pro jednoduchost můžeme brát pouze V.

  Pozn.: Takovýto vektorový prostor nazýváme reálným. Pokud bychom skaláry $(\alpha, \beta, ...)$ brali i komplexní, mluvili bychom o komplexním vektorovém prostoru.

- Pojem *axiom* používali již staří Řekové a v zásadě znamená „vyžadováno“ nebo „jevící se hodnověrné“. Myslí se tím tvrzení, které se všeobecně považuje za platné a už se nedokazuje. To je třeba náš případ, výše uvedené axiomy jsou vesměs vlastnosti, které bychom tak nějak přirozeně očekávali od sčítání a násobení. Axiomy tedy obecně tvoří jakési základní stavební kameny matematiky a logiky, neboť všechny kdy dokázané výroky se v jádru opírají o to, že něco prostě platit musí. [12]

- Okamžitě vidíme, že uvedené axiomy platí pro reálná čísla a jejich sčítání a násobení. Uveďme si několik dalších příkladů vektorových prostorů:

[12] Jinak bychom se se všemi důkazy a logikou točili v kruhu stylem - co bylo dřív, slepice nebo vejce?

1. $\mathbb{R}^n$, tj. n-rozměrné reálné vektory, s operací sčítání vektorů a násobení vektoru číslem tvoří vektorový prostor.
2. Totéž platí pro $\mathbb{R}^{m,n}$, tedy prostor všech matic o rozměrech m na n.
3. Všechny reálné funkce definované nad nějakou množinou s operací sčítání funkcí (tj. $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$) a násobení funkce skalárem jsou také vektorovým prostorem.
4. Speciálně, množina všech polynomů stupně nejvýše 3, tj. množina P_4, je také vektorovým prostorem.
5. Množina všech řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

   tvoří vektorový prostor.

Dokázali byste pro některé z výše uvedených příkladů dokázat, že jde skutečně o vektorové prostory?

- Všimněme si, že mezi příklady se nám objevily i jakési „dvojice“. Například jsme mluvili o množině všech funkcí a poté o polynomech, což jsou ale speciální případy funkcí. Pomalu se tím dostáváme k pojmu **vektorový podprostor**:

Mějme vektorový prostor V a nějakou jeho podmnožinu U. Pokud U je samo vektorovým prostorem (se stejnými operacemi jako V), pak U nazýváme vektorovým podprostorem prostoru V.

Podprostory se vyskytují v řadě aplikací, o kterých si však povíme něco, až budeme znát pojmy jako jsou báze nebo (bi)lineární zobrazení. Podstatné je, že ověřit, že je něco podprostorem by vzhledem k osmi axiomům byla spousta práce. Naštěstí stačí ověřit pouze uzavřenost operací, tzn. že

$$\forall u_1, u_2 \in U: \quad (u_1 + u_2) \in U, \qquad (\forall u \in U)(\forall \alpha \in \mathbb{R}): \quad (\alpha u) \in U,$$

axiomy jsou pak implicitně zajištěny tím, že $U \subset V$.

- **Př.:** Ověřte, že množina $U = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0\right\}$ [13] je spolu s klasickým sčítáním vektorů a jejich násobením číslem vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$.

[13] Pro ty, kdo by se ještě nepřátelili s množinovým zápisem, množina všech prvků z nějaké větší množiny X, které splňují „něco“ se zapisuje jako $\{\text{prvek } \in X : \text{ prvek splňuje „něco“}\}$.

První věc, která musí být splněna, U musí být podmnožina $\mathbb{R}^3$. To je však zcela evidentní protože množina U je definována jako výběr z množiny $\mathbb{R}^3$. Zbývá ověřit uzavřenost operací.

1. Vezměme libovolné 2 prvky množiny U, tj. $u_1 = [x_1, y_1, 0]\,,\ u_2 = [x_2, y_2, 0]$. Nyní je sečtěme, dostáváme
$$u_1 + u_2 = [x_1, y_1, 0] + [x_2, y_2, 0] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0 + 0] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0]\,.$$
Dostali jsme opět vektor, jehož třetí složka je 0, tzn. $(u_1 + u_2) \in U$. $\checkmark$
2. Použijme podobnou úvahu s násobením libovolným skalárem α:
$$\alpha u_1 = \alpha\,[x_1, y_1, 0] = [\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha \cdot 0] = [\alpha x_1, \alpha y_1, 0] \in U. \ \checkmark$$

Obě operace jsou tedy uzavřené v rámci U a protože $U \subset \mathbb{R}^3$, tak vidíme, že
U je skutečně vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$.

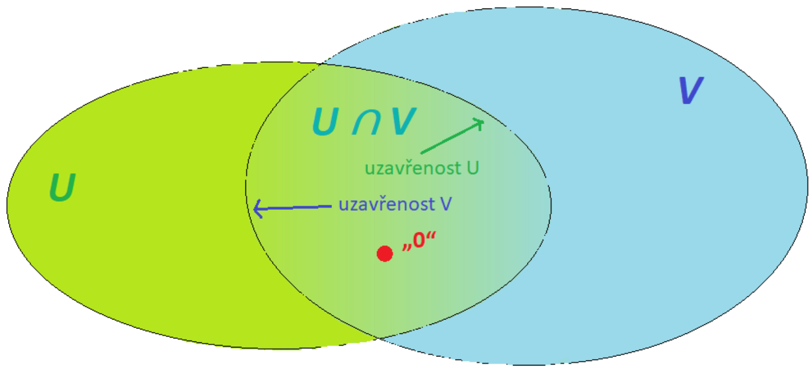
- **Př.:** Zjistěte, zda je množina $U = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ z = x + 1\right\}$ spolu s klasickým sčítáním vektorů a jejich násobením číslem vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$.

Opět zřejmě $U \subset \mathbb{R}^3$, ověřme tedy uzavřenost operací:

1. Vezměme libovolné 2 prvky množiny U, tj. $u_1 = [x_1, y_1, z_1] = [x_1, y_1, x_1 + 1]\,,\ u_2 = [x_2, y_2, z_2] = [x_1, y_1, x_2 + 1]$. Nyní je sečtěme, dostáváme
$$u_1 + u_2 = [x_1, y_1, x_1 + 1] + [x_2, y_2, x_2 + 1] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 + 2]\,.$$
První složka výsledného vektoru je $x_1 + x_2$. Aby $u_1 + u_2$ patřilo do množiny U, musela by třetí složka být $(x_1 + x_2) + 1$. Jenže ta nám vyšla $(x_1 + x_2) + 2$, $u_1 + u_2$ tedy do množiny U **nepatří**.
2. Jelikož U není uzavřená na sčítání, zkoušet uzavřenost na násobení už nemá cenu, musely by platit obě podmínky.

Takže U **není** vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$.

- Dá se ukázat, že **průnik vektorových prostorů je opět vektorový prostor**.



Obrázek 4: Ilustrace průniku vektorových prostorů

To znamená, že pokud bychom měli zadanou nějakou množinu, v níž má platit více podmínek současně, stačí pro každou podmínku zvlášť ověřit, zda by šlo o vektorový podprostor. Je-li tomu tak pro všechny podmínky, množina je sama o sobě také vektorovým podprostorem. To může spoustě z Vás ulehčit život zejména v domácích úkolech. Samozřejmě to ale neznamená, že nemůžete postupovat po svém, pokud si všimnete nějakého „triku“ nebo zjednodušení ve chvíli, kdy byste pracovali se všemi podmínkami najednou.

Př.: Zjistěte, zda je množina

$$U = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ x = 2y \quad \wedge \quad y^2 + z^2 = 0\right\}$$

spolu s klasickým sčítáním vektorů a jejich násobením číslem vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$.

Stejně jako v předchozích příkladech je evidentní, že $U \subset \mathbb{R}^3$. Podmínky máme dány dvě, můžeme tedy pro každou zvlášť otestovat, zda je splněna uzavřenost operací.

$x = 2y$:

1. $u_1 = [x_1, y_1, z_1] = [2y_1, y_1, z_1]\,, \ u_2 = [x_2, y_2, z_2] = [2y_2, y_2, z_2]\,,$

$$u_1 + u_2 = [2y_1 + 2y_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2] = [2(y_1 + y_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2] \quad \checkmark$$

2. $u_1 = [x_1, y_1, z_1] = [2y_1, y_1, z_1]\,, \quad \alpha \in \mathbb{R},$

$$\alpha u_1 = [\alpha \cdot 2y_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1] = [2(\alpha y_1), \alpha y_1, \alpha z_1] \quad \checkmark$$

Vzhledem k první podmínce je U uzavřená. Druhou podmínku nyní berte trochu jako **varovný příklad**.

$y^2 + z^2 = 0$:

1. $u_1 = [x_1, y_1, z_1]\,,\ u_2 = [x_2, y_2, z_2]\,,$

$$u_1 + u_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2] \ldots$$

A co teď? Kdybychom otrocky vzali věci jak jsou, dostali bychom

$$(y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2 = y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 + z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 =$$

$$= \underbrace{(y_1^2 + z_1^2)}_{=0} + \underbrace{(y_2^2 + z_2^2)}_{=0} + 2y_1y_2 + 2z_1z_2 = 2(y_1y_2 + z_1z_2) \stackrel{?}{=} 0$$

No jo, ale platí to? Jak vidíte, ne vždy je dobré slepě brát podmínky jak leží a běží, někdy je fajn se nejdřív zamyslet. Protože co vlastně znamená $y^2 + z^2 = 0$? Druhá mocnina čehokoliv (jsme v reálném oboru) je nulová nebo kladná. Aby součet dvou druhých mocnin byl nulový, existuje jediná možnost, jak to zajistit: $y = z = 0$. Teď už to bude o poznání lehčí:

$$u_1 + u_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2] = [x_1 + x_2, 0 + 0, 0 + 0] = [x_1 + x_2, 0, 0] \quad \checkmark$$

2. $u_1 = [x_1, y_1, z_1] = [x_1, 0, 0]\,,\quad \alpha \in \mathbb{R},$

$$\alpha u_1 = [\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0] = [\alpha x_1, 0, 0] \quad \checkmark$$

Po menším škobrtnutí tedy vidíme, že i vzhledem ke druhé podmínce je U uzavřená. Jelikož je uzavřená vzhledem k oběma podmínkám, je uzavřená obecně a tedy je podprostorem $\mathbb{R}^3$.

Pozn.: Pokud bychom vzali v potaz upravenou podmínku $y = z = 0$ a dali ji dohromady s podmínkou $x = 2y$, zjistili bychom, že také $x = 0$ a **množina U obsahuje jediný vektor:** $[0, 0, 0]$. Toto je tzv. **triviální vektorový prostor**, tedy takový, který obsahuje pouze nulový prvek (ten triviálně splňuje všechny axiomy, odtud název).

Vektorový prostor tedy může mít jediný prvek. Může jich mít třeba 5? Nebo 42? Nemůže. Není těžké si z axiomů rozmyslet (zkuste si), že pokud má vektorový prostor obsahovat i jiný, než nulový prvek, už jich nutně musí obsahovat **nekonečně mnoho**.

- Možná si říkáte, proč probíráme takové „abstraktní hňupiny“. Inu jednoduše proto, abyste viděli, že nejen čísla a vektory mohou mít povědomou strukturu a pravidla. Vektorový prostor je taková základní „holá“ struktura, která volně řečeno dává smysl a řád sčítání a násobení číslem na jakýchkoliv objektech, kde je lze definovat. Platí to třeba pro řešení soustav, velmi markantní je to pro funkce a ještě obecnější zobrazení, neboť bez možnosti chápat tyto jako prvky vektorového prostoru bychom se jen stěží mohli rozumně zabývat rovnicemi s nimi a především jejich praktickým řešením. Zvlášť užitečné jsou v tomto směru pojmy, o kterých si povíme v dalších cvičeních.

6 Lineární závislost a nezávislost, lineární kombinace, obal

- Připomenutí: **singulární matice** je taková matice, ke které neexistuje inverze. Soustavy s ní mají nekonečně mnoho nebo naopak žádné řešení.

- **Lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ rozumíme součet

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n,$$

kde koeficienty α_i jsou nějaká (libovolná reálná) čísla. Například když vezmu vektory $\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}2 & -1\end{smallmatrix}\right]$, tak příkladem jejich lineární kombinace může být třeba $3\cdot\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix}\right]+2\cdot\left[\begin{smallmatrix}2 & -1\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}7 & -2\end{smallmatrix}\right]$. Množina všech lineárních kombinací daných vektorů se nazývá **lineární obal** a značíme jej buď $\mathrm{Lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ nebo $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Formálně zapsáno, jestliže $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, pak

$$\mathrm{Lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \overset{def.}{:=} \{\mathbf{u} \in V : \ \mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

- Už jsme narazili na situaci, kdy matice nenesla kompletní informaci a při její úpravě na schodový tvar se nám nějaký řádek (nebo více řádků) celý vynuloval. Také už jsme si řekli, že tato situace nastane u singulárních matic. Proč k tomuto dochází? Je to zkrátka tím, že jeden nebo více řádků (tj. vektorů v matici) je poskládán z ostatních - **je nějakou lineární kombinací**. Aby byla matice regulární, musí být její řádky **lineárně nezávislé**:

Množinu vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ nazveme **lineárně nezávislou**, jestliže

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{o}$$

může nastat pouze pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Jinými slovy, pokud jsou vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineárně nezávislé, tak žádný z nich nejde poskládat pomocí nějaké lineární kombinace ostatních.

- **Př.:** Představme si, že budu mít nějaké vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ a vektor $\mathbf{v}_3$, který je lineární kombinací předchozích dvou, třeba $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$. No a když v téhle rovnosti převedu všechno na levou stranu, tak dostanu $-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$. Tím pádem vidím, že z vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ můžu vyrobit nulový vektor lineární kombinací s koeficienty $-1, 2$ a 1. Vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ jsou tedy lineárně závislé. Všimněme si, že i když teď rovnost přenásobíme libovolným číslem t, tak bude splněna, takže jakákoliv lineární kombinace s koeficienty $-t, 2t$ a t, $t \in \mathbb{R}$ dá nulový vektor.

- Jakým způsobem obecně ověříme, zda je množina vektorů lineárně nezávislá či nikoliv? Chceme zjistit, pro jaké koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ platí

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o}.$$

Když si uvědomíme, že pracujeme s nějakými obecně m-rozměrnými vektory, tak výše uvedená rovnost není nic jiného, než soustava rovnic

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

tedy soustava $\mathbf{V}\alpha = \mathbf{o}$, kde matice $\mathbf{V}$ je zkrátka taková, ve které vezmeme jako její sloupce vyšetřované vektory. Pak stačí tuto soustavu s nulovou pravou stranou (která už z dřívějška víme, že má určitě řešení) vyřešit. Pokud nám vyjde právě jedno řešení, nutně vyjde $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ a množina vektorů bude nezávislá. Pokud vyjde nekonečno řešení, pak je závislá.

- Ve chvíli, kdy pracujeme s nulovou pravou stranou, tak jednoduše buď vyjde v matici vlevo nulový řádek (tedy nekonečno řešení), nebo ne (tedy právě jedno - nulové řešení). Při ověřování nezávislosti tak stačí upravovat pouze samotnou matici bez pravé strany.

- **Př.:** Rozhodněte, zda jsou lineárně závislé či nezávislé vektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Co teď? Prostě tyto vektory vezmeme jako sloupce matice, kterou upravíme na schodový tvar. Pokud nám nevyjde žádný nulový řádek, jsou nezávislé, pokud nějaký vyjde, jsou závislé:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -\mathbf{r}_1 \\ -\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 2\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Máme matici ve schodovém tvaru a nulový řádek nám nevyšel. Zadané vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

- **Př.:** Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti polynomů

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = x + 2, \quad h(x) = x^2 - x + 1.$$

Ve chvíli, kdy máme kvadratický polynom $ax^2 + bx + c$, můžeme ho jednoduše chápat jako vektor $[a, b, c]^T$:[14]

$$x^2 - 1 \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x + 2 \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x^2 - x + 1 \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nyní můžeme aplikovat postup, který jsme použili už v předchozím příkladu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{r}_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{r}_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zjistili jsme, že matice je regulární, takže polynomy f, g, h jsou lineárně nezávislé.

- Polynomy si můžeme napsat jako vektory, ale co obecnější funkce? Dá se ukázat, že když chceme ověřit lineární nezávislost n funkcí, stačí si zvolit n **různých** bodů, dosadit je a za sloupce v maticích brát vektor funkčních hodnot daných funkcí. Pokud by nám vyšel nulový řádek, tak u obecných funkcí nevíme, zda jsou závislé či ne. Nicméně, pokud nám vyjde lineární nezávislost vektorů funkčních hodnot, jsou tyto funkce také lineárně nezávislé.

Př.: Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé funkce

$$f(x) = 1, \qquad g(x) = \cos(x), \qquad h(x) = \sin(x).$$

Vybereme si 3 různé body (pokud možno takové, které nám dají hezké hodnoty), např. $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi$:

$$f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f(\pi) = 1 \quad f(x) \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g(0) = 1, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, g(\pi) = -1 \quad g(x) \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$h(0) = 0, h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, h(\pi) = 0 \quad h(x) \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[14] Obecně, polynom n-tého stupně lze v jistém smyslu chápat jako $(n+1)$-rozměrný vektor koeficientů.

S výslednými vektory pokračujeme tak, jak to známe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{r}_1 \\ -\mathrm{r}_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{r}_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Matice vyšla regulární, o funkcích f, g, h tedy lze říct, že jsou lineárně nezávislé .

7 Báze a dimenze vektorového prostoru, souřadnice

- Minule jsme si řekli něco o lineárních kombinacích a lineární nezávislosti ve vektorových prostorech. V této části se podíváme na velice důležité pojmy, které z této látky čerpají.
  Připomenutí:
  - Lineární kombinací vektorů rozumíme libovolný součet jejich libovolných násobků.
  - Lineární obal dané množiny vektorů je množina všech možných lineárních kombinací těchto vektorů.
  - Vektory jsou lineárně nezávislé, jestliže nejsou vzájemnou lineární kombinací.

- Množinu vektorů $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ nazveme **bází** prostoru V, jestliže je lineárně nezávislá a platí $\mathrm{Lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} = V$. Číslo n se nazývá **dimenze prostoru** V, značíme $\dim V$. Jinými slovy, báze je množina, z níž můžeme pomocí lineárních kombinací vygenerovat jakýkoliv prvek prostoru, tzn.

$$(\forall \mathbf{w} \in V)(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

  Číslům $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se pak říká **souřadnice vektoru $\underline{\ \mathbf{w}\ }$ v bázi** $\{\mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Máme-li nějakou bázi E, vektor souřadnic vektoru $\mathbf{w}$ v bázi E označujeme $[\mathbf{w}]_E$.

  Všimněme si, že koncept souřadnic jsme využili již při ověřování lineární nezávislosti polynomů: $f(x) = ax^2 + bx + c$ jsme ztotožňovali s vektorem $[a, b, c]^T$, to však nebylo nic jiného, než souřadnicový vektor funkce f vzhledem k bázi $E = \{x^2, x, 1\}$.

- **Př.:** Prostor $\mathbb{R}^3$ má bázi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, kde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

  Obecně pro n-rozměrné vektory bychom jako příklad báze mohli vzít sadu n vektorů, které jsou v zásadě sloupce n-rozměrné jednotkové matice. Takovéto bázi se často říká **standardní báze**.

- Jak už jsme si řekli, ve chvíli, kdy máme bázi, můžeme z ní získat vhodnou lineární kombinací jakýkoliv prvek prostoru. Otázkou je, jak zjistíme koeficienty této lineární kombinace. Jenže co jsme dělali, když jsme ověřovali lineární nezávislost? Chtěli jsme zjistit, pro jakou lineární kombinaci dostaneme nulový vektor. Dali jsme tedy vektory do sloupců matice a řešili soustavu s nulovou pravou stranou. Nyní budeme dělat naprosto totéž, chceme zjistit, pro jakou kombinaci nám dají prvky báze hledaný vektor, sestavíme z báze tedy matici a na pravou stranu dáme vektor, jehož souřadnice hledáme.

- **Př.:** $E = \{[1,1,0], [0,1,1], [1,0,1]\}$, $\mathbf{v} = [2,1,1]$, $\quad [\mathbf{v}]_E = ?$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\mathbf{r}_1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 1 \end{array}$$

$\underline{\underline{\text{Takže } [\mathbf{v}]_E = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]}}$. Co to vlastně znamená? Že $[2,1,1] = 1 \cdot [1,1,0] + 0 \cdot [0,1,1] + 1 \cdot [1,0,1]$.

- **Př.:** $E = \{1 - x^2, x^2 + x, x + 2\}$, $\mathbf{v}(x) = 2x^2 + 5x + 5$, $\quad [\mathbf{v}]_E = ?$

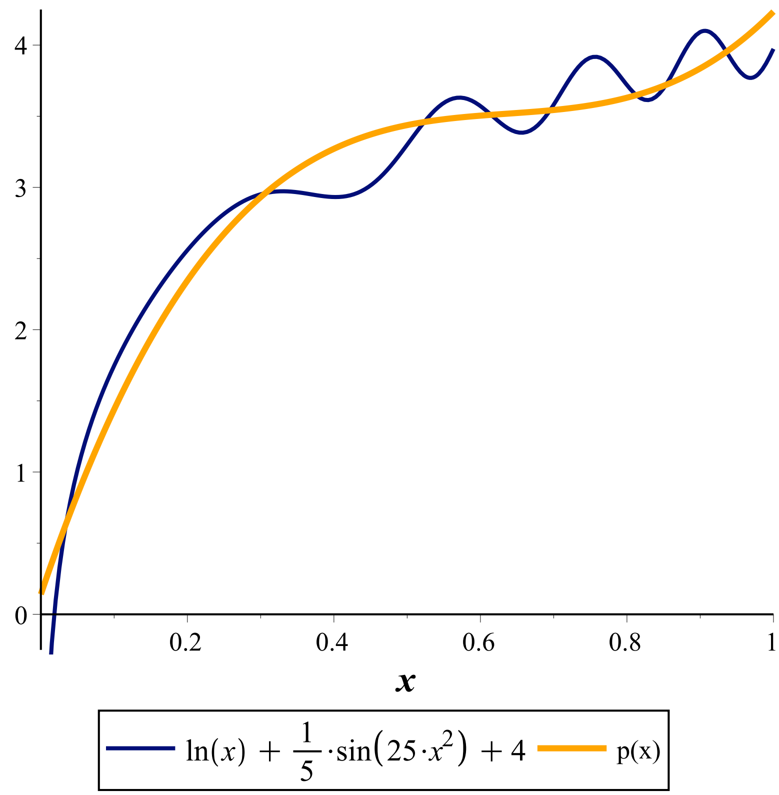
Postup bude stejný, ale nejprve musíme nějakým způsobem vyjádřit polynomy jako vektory. K tomu využijeme pro polynomy standardní bázi $\{x^2, x, 1\}$. Na tomto příkladě můžeme vidět, že při přechodu z jedné báze do druhé do sloupců zapisujeme prvky cílové báze vyjádřené pomocí původní báze. To se děje vždy, dokonce i v předchozím příkladě, jen to není vidět, protože ve standardní bázi jsou souřadnice shodné s vektorem samotným.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ +\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = 2 \end{array}$$

$\underline{\underline{\text{Takže } [\mathbf{v}]_E = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]}}$. Co to vlastně znamená? Že $2x^2+5x+5 = 1\cdot(1-x^2)+3\cdot(x^2+x)+2\cdot(x+2)$.

- Proč bychom mohli chtít změnu báze? Důvodů může být mnoho, většinou jde nicméně o to, že jiná báze nám může dát nový pohled na danou strukturu, případně významně ulehčit výpočty.

Vezměme si konkrétní problém: Máme nějakou nepěknou funkci, kterou chceme co nejlépe aproximovat polynomem třetího stupně, tak jako na obrázku:

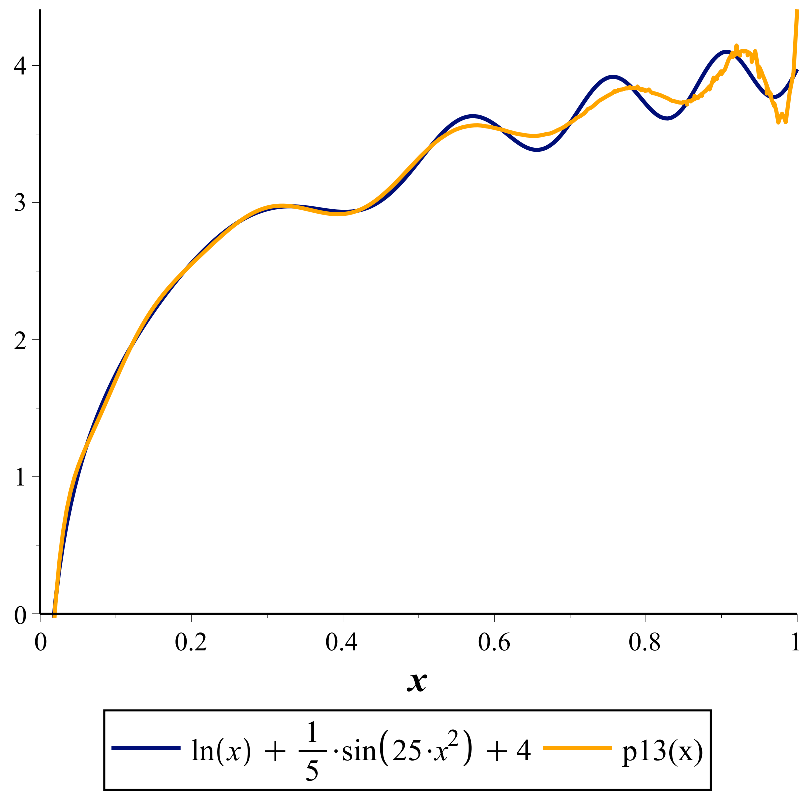


Obrázek 5: Aproximace „nehezké“ funkce polynomem třetího stupně $p(x)$

Technické detaily vynecháme, nicméně si můžeme říct, že problém vede na soustavu rovnic, přičemž aproximovaná funkce ovlivní pouze pravou stranu. Matice soustavy závisí pouze na bázi, ve které budeme polynom hledat. Pokud bychom zvolili standardní bázi $\{x^3, x^2, x, 1\}$, která by nás nejspíš napadla jako první, dostali bychom takovouto matici soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Asi si umíte představit, že upravovat takovouto matici na schodový tvar by nebylo nic hezkého. A to by bylo jen pro polynom třetího stupně, s vyšším stupněm bychom dostali lepší aproximaci:



Obrázek 6: Aproximace „nehezké“ funkce polynomem třináctého stupně $p_{13}(x)$

A to by teprve byla nepěkná matice, kdybychom brali standardní bázi. Navíc takto zkonstruované matice by měly velmi špatné vlastnosti, myšleno tak, že malá chyba při postupu by znamenala velkou chybu ve výsledku. Vraťme se ale k polynomu třetího stupně. Klasická báze se tedy nejeví, jako život ulehčující, spíš naopak, i když se tváří hezky. Naproti tomu, báze

$$\left\{1,\quad 2\sqrt{3}x-\sqrt{3},\quad 6\sqrt{5}x^2-6\sqrt{5}x+\sqrt{5},\quad 20\sqrt{7}x^3-30\sqrt{7}x^2+12\sqrt{7}x-\sqrt{7}\right\}$$

sice může vypadat nevábně, ale vedla by na soustavu s jednotkovou maticí - tj. řešením soustavy by byla přímo pravá strana a nic by se počítat nemuselo. Čím to je, to si stručně povíme v příslušné kapitole.

- Jak poznáme, že nějaká množina tvoří bázi? **Stačí ověřit její lineární nezávislost, a pokud obsahuje počet vektorů, odpovídající dimenzi, pak tvoří bázi**. Kdybychom dimenzi prostoru (případně podprostoru), ve kterém jsme, neznali, tak bychom po ověření lineární nezávislosti vzali obecný vektor z daného (pod)prostoru a snažili se jej vyjádřit jako lineární kombinaci vyšetřované množiny. Pokud bychom zjistili, že soustava má řešení bez dodatečných podmínek na onen obecný vektor, můžeme vyšetřovanou množinu prohlásit za bázi.

8 Lineární zobrazení

- Mějme nějaké dva vektorové prostory U a V. Zobrazení $A : U \to V$ nazveme **lineární**, jestliže splňuje následující:

  1. $\forall u_1, u_2 \in U: \quad A(u_1 + u_2) = A(u_1) + A(u_2)$,
  2. $(\forall u \in U)(\forall \alpha \in \mathbb{R}): \quad A(\alpha u) = \alpha A(u)$.

  Volně řečeno, je to tedy zobrazení, v němž nezáleží, zda dosadíme součet, nebo součet provedeme až po působení zobrazení, a můžeme vytknout konstantu.

- Uveďme si několik příkladů lineárního zobrazení:

  ◦ $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A([x_1, x_2]) = [2x_1, x_1 - x_2]$ je lineární zobrazení, což si můžeme ověřit, musí být splněny obě výše uvedené podmínky linearity:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2: \quad \underline{A(\mathbf{x} + \mathbf{y})} = \begin{bmatrix} 2(x_1 + y_1) \\ (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2y_1 \\ (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} = \underline{A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})} \quad \checkmark$$

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2)(\forall \alpha \in \mathbb{R}): \quad \underline{A(\alpha \mathbf{x})} = \begin{bmatrix} 2\alpha x_1 \\ \alpha(x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \underline{\alpha A(\mathbf{x})} \quad \checkmark$$

  Naše zobrazení je tedy lineární.

  Pozn.: Všimněme si, že ověřování linearity je poměrně podobné jako když jsme ověřovali, zda je množina vektorovým podprostorem. To není náhoda, každé lineární zobrazení generuje vektorový podprostor, korektněji řečeno, obor hodnot každého lineárního zobrazení je vektorovým podprostorem cílového prostoru V, a to právě díky linearitě.

  ◦ Obecněji, budeme-li mít $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované jako

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

  bude takovéto zobrazení lineární a navíc není těžké si rozmyslet, že to vlastně není nic jiného než násobení maticí $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, tzn.

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Pro konkrétní příklad, pokud vezmeme $a = d = \cos\varphi$, $-b = c = \sin\varphi$, dostaneme matici rotace bodu kolem počátku o úhel φ. Rotace je tedy také lineární zobrazení. Obecně se každé lineární zobrazení dá reprezentovat pomocí matice, což si ukážeme později.

- Derivace je také lineární zobrazení. Konkrétně pokud bychom měli derivaci kvadratické funkce, mohl by zápis vypadat např. takto: $D : P_3 \to P_2, \quad f(x) = ax^2 + bx + c, \quad D(f)(x) = 2ax + b$
- *Lineární funkce* $f(x) = ax+b$ obecně není lineární zobrazení! Vadí nám v tom absolutní člen b:

$$\color{red}{f(x+y)} = a(x+y) + b = ax + ay + b \color{red}{\neq} ax + ay + 2b = ax + b + ay + b = \color{red}{f(x) + f(y)}.$$

Pouze pro $b = 0$ se o lineární zobrazení jedná. Nenulové b přidává krom lineární transformace navíc posunutí, o lineárním zobrazení s posunutím se občas hovoří jako o tzv. *afinním zobrazení.*

- Lineární zobrazení vždy pošle „nulu do nuly“, tj. pokud $A : U \to V$ je lineární, pak platí $A(\mathbf{o}_U) = \mathbf{o}_V$. Mimo jiné to znamená, že když hledáme lineární transformaci nějakého objektu, u které potřebujeme nulu zobrazit na něco jiného, než zase nulu, musíme přidat posunutí.

- Klíčovou vlastností lineárních zobrazení je, že **zachovávají lineární kombinace**, tj.

$$A(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \alpha_1 A(\mathbf{x}_1) + \ldots + \alpha_n A(\mathbf{x}_n).$$

Připomeňme si navíc, že báze je množina vektorů, z nichž můžeme pomocí lineárních kombinací vygenerovat jakýkoliv prvek prostoru. Dáme-li tyto dvě informace dohromady, vidíme, že pokud víme, jak se zobrazí prvky báze, tak nám to pak stačí k určení zobrazení libovolného vektoru. Jak to? Stačí najít souřadnice zobrazovaného vektoru v oné bázi a výsledný obraz pak bude stejnou lineární kombinací obrazů báze.

- **Př.:** $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, a známe obrazy báze:

$$A([1,1,0]) = [0,1]$$
$$A([0,1,1]) = [1,1]$$
$$A([1,0,1]) = [-2,0]$$

Pokusme se nyní najít $A([0,0,2])$. K tomu musíme vyjádřit vektor $[0,0,2]$ v souřadnicích báze $\{[1,1,0], [0,1,1], [1,0,1]\}$ (je třeba si kvůli souřadnicím dávat pozor na pořadí!):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\mathbf{r}_1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & -1 \\ \alpha_2 & = & 1 \\ \alpha_3 & = & 1 \end{array}$$

Vidíme tedy, že $[0,0,2] = -1 \cdot [1,1,0] + 1 \cdot [0,1,1] + 1 \cdot [1,0,1]$, a proto

$A([0,0,2]) = -1 \cdot A([1,1,0]) + 1 \cdot A([0,1,1]) + 1 \cdot A([1,0,1]) = -1 \cdot [0,1] + 1 \cdot [1,1] + 1 \cdot [-2,0] = \underline{\underline{[-1,0]}}$

- Zachovávání lineárních kombinací funguje i na druhou stranu, takže když máme zobrazené prvky báze, můžeme zpětně najít vzor k již zobrazenému vektoru. Nemusí to však nutně jít! Když vyjadřujeme obraz nějakého vektoru, máme jistotu, že dostaneme jeden vektor, ale tady, když jdeme „opačným směrem“, se může stát, že budeme mít nekonečně hodně řešení, případně žádné řešení.

Př.: Vezměme stejné lineární zobrazení z minulého příkladu. Pokusme se najít takový vektor (vektory) $\mathbf{x}$, že $A(\mathbf{x}) = [5,4]$.

V podstatě na to půjdeme stejně, teď ale budeme hledat lineární kombinaci v cílovém světě, takže do sloupců matice soustavy dáme obrazy báze:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \updownarrow \\ \mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & -1-2t \\ \alpha_2 & = & 5+2t \\ \alpha_3 & = & t \end{array} , \quad t \in \mathbb{R}$$

Vektor $\mathbf{x}$ bude stejnou lineární kombinací v rámci vzorů, tj.:

$$\mathbf{x} = (-1-2t)\,[1,1,0] + (5+2t)\,[0,1,1] + t\,[1,0,1] = \underline{\underline{[-1-t, 4, 5+3t]\,,\ t \in \mathbb{R}}}\,.$$

- Pro pořádek a blbuvzdorně:
  - Pokud určuju **NA CO SE ZOBRAZÍ** zadaný vektor, hledám lineární kombinaci vzorů, tj. „toho vlevo“.
  - Pokud určuju **CO SE ZOBRAZILO NA** zadaný vektor, hledám lineární kombinaci obrazů, tj. „toho vpravo“.
  - V obou případech, jakmile danou lineární kombinaci najdu, výsledek zjistím tak, že ji použiju **NA OPAČNOU STRANU**. Tj. když jsem našel lineární kombinaci obrazů (to vpravo), použiju ji na vzory (to vlevo) a naopak.

- Mějme $A : U \to V$. **Jádro** lineárního zobrazení je množina

$$\mathcal{N}(A) = \{u \in U : \ A(u) = \mathbf{o}\}\,,$$

tedy všechny vektory, které se zobrazí na nulu (nulový prvek).
Oborem hodnot lineárního zobrazení rozumíme

$$\mathcal{H}(A) = \{(v \in V)(\exists u \in U) : A(u) = v\}\,,$$

tedy množina všech možných obrazů.

- Jádro i obor hodnot nalezneme podobně, jako v posledním příkladě. V případě jádra bychom hledali vzory nulového vektoru, v případě oboru hodnot bychom hledali vzor obecného vektoru, a z dodatečných podmínek, za kterých bude soustava řešitelná získáme podobu oboru hodnot.

- Je jednoduché ukázat, že jádro je vektorovým podprostorem U a obor hodnot zase podprostorem V. Dimenzi jádra nazýváme **defektem** lineárního zobrazení, dimenzi oboru hodnot **hodností**. Platí, že součet defektu a hodnosti je roven dimenzi U. Nevěříte? Věřte:

  Jelikož jádro i obor hodnot jsou vektorovými podprostory, je zřejmé, že mají nějakou bázi. Označme proto D defekt zobrazení A a H pro změnu jeho hodnost. Dále označme

$$\mathcal{N}(A) = \operatorname{Lin}\{u_1, \ldots, u_D\},$$

$$\mathcal{H}(A) = \operatorname{Lin}\{A(v_1), \ldots, A(v_H)\}.$$

  Nyní si vezměme libovolný vektor $u \in U$ a nalezněme jeho obraz. Je zřejmé, že tento leží v oboru hodnot a tedy lze vyjádřit pomocí báze oboru hodnot, jinými slovy

$$\exists (k_1, \ldots, k_H) \in \mathbb{R}^H : \qquad A(u) = k_1 A(v_1) + \ldots + k_H A(v_H).$$

  Převodem všeho vlevo a využitím linearity A máme

$$A(u - (k_1 v_1 + \ldots + k_H v_H)) = o,$$

  což neznamená nic jiného, než že $u - (k_1 v_1 + \ldots + k_H v_H)$ je prvkem jádra. Tím pádem ale lze tento vektor vyjádřit pro změnu pomocí báze jádra, tedy

$$\exists (p_1, \ldots, p_D) \in \mathbb{R}^D : \qquad u - (k_1 v_1 + \ldots + k_H v_H) = p_1 u_1 + \ldots + p_D u_D.$$

  V tuto chvíli vidíme, že libovolný prvek $u \in U$ lze vyjádřit pomocí $D + H$ souřadnic jako

$$u = k_1 v_1 + \ldots + k_H v_H + p_1 u_1 + \ldots + p_D u_D,$$

  jelikož u mohlo být libovolné, je zřejmé, že $D + H \geq \dim U$. Navíc, jelikož lineární zobrazení „posílá nulu do nuly“ a $u_1, \ldots, u_D \in \mathcal{N}(A)$, není těžké si rozmyslet, že množina $\{v_1, \ldots, v_H, u_1, \ldots u_D\}$ je lineárně nezávislá, tím pádem $D + H = \dim U$. $\square$

- Uvedené tvrzení o dimenzích lze někdy využít k určení oboru hodnot, známe-li jádro a naopak. Například, máme-li zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a víme, že defekt tohoto zobrazení je roven 1, je pak zřejmé, že hodnost je $3 - 1 = 2$. Jelikož ale cílový prostor má sám dimenzi 2, je jasné, že $\mathcal{H}(A) = \mathbb{R}^2$.[15]

[15] Rozmyslete si, že platí: Když W je podprostorem V, pak $(\dim V = \dim W) \quad \Leftrightarrow \quad (V = W)$.

- Všimněme si, že jelikož lineární zobrazení pošle nulu nutně do nuly, jádro je vždy neprázdné. U lineárních zobrazení, které mají stejný výchozí a cílový prostor platí, že pokud jádro obsahuje pouze nulový prvek, znamená to, že dané lineární zobrazení je prosté, a jeho oborem hodnot je celý cílový prostor. Uvedené tvrzení není nijak v rozporu s ničím, co bylo řečeno dříve, protože
  - Množina obsahující pouze nulový prvek je tzv. *triviální vektorový prostor* (můžete si zkusit ověřit, že všechny axiomy vektorového prostoru splňuje),
  - dimenze množiny, obsahující pouze jeden (nulový) prvek je 0.
- **Př.:** Pokusme se najít jádro a obor hodnot zobrazení z předchozího příkladu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \updownarrow \\ \mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & -t \\ \alpha_2 & = & 2t \\ \alpha_3 & = & t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Jádrem je tedy jakýkoliv vektor $\mathbf{x}$ ve tvaru

$$\mathbf{x} = -t\,[1,1,0] + 2t\,[0,1,1] + t\,[1,0,1] = [0,t,3t] = t\,[0,1,3]\,, t \in \mathbb{R},$$

vidíme tedy, že jádro tvoří libovolný násobek vektoru $[0,1,3]$, takže $\underline{\underline{\mathcal{N}(A) = \mathrm{Lin}\,\{[0,1,3]\}}}$.

Co se oboru hodnot týče, musíme zjistit, jaké vektory lze ze zadaných obrazů poskládat. Budeme tedy řešit podobnou soustavu jako u jádra, ale napravo si nedáme nulový vektor, nýbrž, nějaký obecný vektor $[v_1, v_2]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & v_1 \\ 1 & 1 & 0 & v_2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \updownarrow \\ \mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 1 & -2 & v_1 \end{array}\right]$$

Máme soustavu ve schodovém tvaru, nicméně na vektor $[v_1, v_2]$ nemáme žádné dodatečné podmínky, ať už tento neznámý vektor bude jakýkoliv, soustava bude řešitelná. Proto je oborem hodnot celý cílový prostor, tj. $\underline{\underline{\mathcal{H}(A) = \mathbb{R}^2}}$.

Pozn.: Že oborem hodnot bude v tomto případě celý cílový prostor se dalo uhodnout z dříve zmíněné poučky: Součet dimenze jádra a dimenze oboru hodnot se rovná dimenzi výchozího prostoru. Výchozím prostorem je $\mathbb{R}^3$, tedy prostor, který má dimenzi 3, a zjistili jsme, že jádro je lineárním obalem jednoho vektoru, tedy má dimenzi 1. Z toho plyne, že dimenze oboru hodnot musela být $3 - 1 = 2$, jenže 2 je zároveň dimenze cílového prostoru $\mathbb{R}^2$. Není tedy jiná možnost, než že $\mathcal{H}(A) = \mathbb{R}^2$.

- **Př.:** Mějme lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dáno obrazy báze

$$A([1,1]) = [-2,3]\,,$$

$$A([-1,0]) = [4,-6]\,.$$

Určeme jeho jádro a obor hodnot.

Začněme opět jádrem. Musíme vyjádřit nulový vektor jako lineární kombinaci obrazů:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2\mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \alpha_1 & = & 2t \\ \alpha_2 & = & t \end{array}\,,\ t \in \mathbb{R}$$

Lineární kombinace, dávající nulový vektor jsme našli, můžeme tedy vyjádřit každý prvek jádra:

$$\mathbf{x} = 2t \cdot [1,1] + t \cdot [-1,0] = [t, 2t] = t \cdot [1,2] \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathcal{N}(A) = \mathrm{Lin}\,\{[1,2]\}}}\,.$$

Pro obor hodnot si vpravo vezmeme obecný vektor $[v_1, v_2]$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & v_1 \\ 3 & -6 & v_2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2\mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & v_1 \\ 0 & 0 & 2v_2 + 3v_1 \end{array}\right]$$

Aby tato soustava měla řešení, musí být ve druhém řádku napravo 0, takže jsme zjistili, že do oboru hodnot patří pouze takové vektory $[v_1, v_2]$, pro které platí $2v_2 + 3v_1 = 0$. Když víme toto, jednu složku vektoru vyjádříme pomocí druhé a dosadíme do obecného předpisu:

$$2v_2 + 3v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{3}{2}v_1 \quad \Rightarrow \quad [v_1, v_2] = \left[v_1, -\frac{3}{2}v_1\right] = v_1 \left[1, -\frac{3}{2}\right].$$

A protože v_1 může být jakékoliv, máme, že $\underline{\underline{\mathcal{H}(A) = \mathrm{Lin}\left\{\left[1, -\frac{3}{2}\right]\right\}}}$.

Pozn.: Protože do oboru hodnot patří jakýkoliv násobek zjištěného vektoru, můžeme místo $\left[1, -\frac{3}{2}\right]$ psát $[2, -3]$, abychom neměli v zápise zlomek, nic tím v tomto případě nepokazíme.

- Jak bylo zmíněno již dříve, KAŽDÉ lineární zobrazení lze reprezentovat pomocí matice, a to tak, že do jejích sloupců naskládáme obrazy báze, působení lineárního zobrazení pak znamená násobení této matice a souřadnicového vektoru, tzn.

$$E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}\,, \qquad A(\mathbf{x}) = [A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)] \cdot [\mathbf{x}]_E\,.$$

- **Př.:** Pomocí matice určeme $A([1,6])$ pro zobrazení A z minulého příkladu.

Už víme, že tento obraz můžeme najít jako $\left[\begin{smallmatrix}-2 & 4\\ 3 & -6\end{smallmatrix}\right][[\begin{smallmatrix}1\\6\end{smallmatrix}]]_E$, kde $\mathrm{E} = \{[1,1], [-1,0]\}$. Potřebujeme tedy pouze najít souřadnice zadaného vektoru:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 6 \\ \alpha_2 & = & 5 \end{array} \Rightarrow [[1,6]]_E = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix},$$

takže[16]

$$A([1,6])^T = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}}}$$

- Pojďme si nyní nápad za použitím matice k reprezentaci lineárního zobrazení trochu více rozebrat. Když jsme hledali obraz zadaného vektoru, tak jsme, při zadané bázi E, hledali jeho souřadnice v dané bázi. Pokud si trochu rozmyslíme, jak se hledají souřadnice v dané bázi a označíme si $\mathbf{E}$ jako matici, jejíž sloupce tvoří zadané vektory báze[17], nemělo by nás překvapit, že platí

$$[\mathbf{x}]_E = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{x}.$$

Dále víme, že jsme nalezené souřadnice aplikovali na obrazy báze, což, označíme-li si $[A]_E$ matici, jejíž sloupce tvoří právě obrazy báze, se dá stručně zapsat jako

$$A(\mathbf{x}) = [A]_E\mathbf{E}^{-1}\mathbf{x}.$$

Matici $[A]_E\mathbf{E}^{-1}$ lze tedy chápat jako matici zobrazení A vůči standardní bázi (jelikož nalezením této matice můžeme všechny potřebné operace obkonat bez hledání souřadnic). Tato idea se dá zobecnit k přechodům k libovolné bázi, které lze vykonat maticí, obsahující souřadnice vektorů jedné báze vzhledem k bázi druhé (viz skripta, případně sbírka dr. Šindela, str. 37).

- **Př.:** Nalezněme pro zobrazení A z předchozích příkladů vektory $A([6,9])$, $A([4,2])$ a $A([3,14])$, aniž bychom vyjadřovali dané vzory pomocí zadané báze:

Jinak řečeno, hledáme matici zobrazení A vzhledem ke standardní bázi:

$$\mathbf{A} = [A]_E\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

[16] Transpozici píšu kvůli tomu, že výsledkem násobení vektoru maticí zleva je sloupcový vektor, nicméně předtím jsem všechny vektory pro stručnější zápis psal jako řádkové.

[17] Pokud bychom nepracovali s algebraickými (číselnými) vektory, ale obecnějšími objekty jako jsou funkce, je samozřejmě nejprve zapotřebí je samy o sobě interpretovat v nějaké bázi jako algebraické vektory.

Nyní stačí násobit touto maticí se zadanými vektory, pilný a nedůvěřivý čtenář si může „klasickou cestou“ ověřit, že jsou výsledky skutečně správné:

$$A([6,9]) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}}},$$

$$A([4,2]) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -12 \\ 18 \end{bmatrix}}},$$

$$A([3,14]) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 16 \\ -24 \end{bmatrix}}}.$$

- Závěrem si shrňme několik dalších skutečností o maticích lineárních zobrazení:
  - Když máme $A : U \to V$, a $\dim U = n, \dim V = m$, tak má matice tohoto lineárního zobrazení rozměry m, n.
  - Pokud $U = V$, pak platí, že příslušná (čtvercová matice) zobrazení je regulární právě tehdy, když (následující podmínky jsou vzájemně ekvivalentní):
    - ∗ Obrazy báze jsou lineárně nezávislé (tzn. také jsou bází),
    - ∗ jádro obsahuje pouze nulový vektor,
    - ∗ oborem hodnot je celý prostor U.

    Pokud regulární není, platí, že dimenze jádra je rovna počtu nulových řádků po úpravě matice na schodový tvar.
  - Pokud $\dim U > \dim V$, pak platí, že:
    - ∗ $\dim \mathcal{N}(A) > 0$ i přesto, že oborem hodnot může být celý prostor V,
    - ∗ což nastane právě tehdy, pokud se mezi obrazy báze prostoru U nachází i nějaká báze prostoru V.
  - Přiřazení matice lineárnímu zobrazení je samo o sobě lineární zobrazení (zvládli byste to dokázat?).

9 Bilineární formy

- Nechť U je nějaký vektorový prostor. Zobrazení $B : U \times U \to \mathbb{R}$ nazveme **bilineární formou**, jestliže jsou splněny následující podmínky:

  1. $\forall u, v, w \in U: \quad B(u+v, w) = B(u, w) + B(v, w)$,
  2. $(\forall u, v \in U)(\forall \alpha \in \mathbb{R}): \quad B(\alpha u, v) = \alpha B(u, v)$,
  3. $\forall u, v, w \in U: \quad B(u, v+w) = B(u, v) + B(u, w)$,
  4. $(\forall u, v \in U)(\forall \alpha \in \mathbb{R}): \quad B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v)$.

  První dvě podmínky nejsou nic jiného, než linearita v první proměnné, druhé dvě zase linearita ve druhé proměnné. Bilineární forma tedy volně řečeno není nic jiného, než lineární zobrazení dvou proměnných, které má za cílový prostor reálná čísla.

- Existují dva speciální typy bilineárních forem:

  – Jestliže pro libovolné x a y platí, že $B(x, y) = B(y, x)$, pak bilineární formu B nazýváme **symetrická.**

  – Jestliže pro libovolné x a y platí, že $B(x, y) = -B(y, x)$, pak bilineární formu B nazýváme **antisymetrická.**

  Pokud je forma symetrická nebo antisymetrická, a chceme ověřit zda je bilineární, plyne platnost podmínek 3. a 4. z prvních dvou, tzn. stačí ověřit linearitu v jedné proměnné, druhá pak platí automaticky. Pokud není symetrická ani antisymetrická, musíme ověřit linearitu v obou proměnných.

- **Př.:** Ověřme, že zobrazení $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ je bilineární forma.

  Ověřme linearitu v první složce, tj. vezměme libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a libovolné číslo α:

$$\underline{B(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w})} = (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 = u_1 w_1 + u_2 w_2 + v_1 w_1 + v_2 w_2 = \underline{B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w})}. \checkmark$$

$$\underline{B(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v})} = (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 = \alpha(u_1 v_1 + u_2 v_2) = \underline{\alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v})}. \checkmark$$

  Zobrazení B je tedy lineární v první proměnné. Navíc si všimněme, že

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = v_1 u_1 + v_2 u_2 = u_1 v_1 + u_2 v_2 = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

  forma je tedy symetrická, a protože jsme zjistili, že je lineární v první proměnné, je lineární automaticky i v té druhé, zobrazení B je tedy skutečně bilineární (a navíc symetrická) forma.

- Bystrý čtenář si mohl všimnout, že bilineární forma z předchozího příkladu je (euklidovský) skalární součin dvourozměrných vektorů. Skutečnost je taková, že jakýkoliv skalární součin je symetrická bilineární forma, opatřená ještě jednou kvalitou, o tom však později.

- Každá bilineární forma se dá napsat jako součet symetrické a antisymetrické bilineární formy, přesněji:
$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = B_S(\mathbf{x},\mathbf{y}) + B_A(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$
kde
$$B_S(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{x},\mathbf{y}) + B(\mathbf{y},\mathbf{x})\right),$$
$$B_A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{x},\mathbf{y}) - B(\mathbf{y},\mathbf{x})\right),$$
přičemž o B_S mluvíme jako o **symetrické části formy** B a o B_A jako o **antisymetrické části formy** B. Můžete si lehce vyzkoušet, že takto definovaná B_S je skutečně symetrická, B_A antisymetrická a platí $B = B_S + B_A$.[18]
Pokud je sama forma B symetrická, tak platí $B_S = B,\ B_A = 0$.

- Stejně jako u lineárních zobrazení, i bilineární forma se dá reprezentovat pomocí matice. Jak tato matice vypadá se dá odvodit právě z vlastností bilineárních forem - v obou proměnných je lineární, takže když do některé z nich dosadíme lineární kombinaci, dostaneme ve výsledku stejnou lineární kombinaci obrazů báze.
Mějme tedy obecně $B : U \times U \to \mathbb{R}$, nechť $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ je bází prostoru U a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$. Jelikož E je báze, můžeme pomocí ní vyjádřit vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$:
$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n,$$
$$\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n.$$
Při tomto označení tedy jinak řečeno $[\mathbf{x}]_E = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},\ [\mathbf{y}]_E = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$. Co se nyní stane, když se pokusíme $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dosadit do formy B? Podívejme se na to:
$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = B\left(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n, \mathbf{y}\right) = B(\alpha_1\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) + \ldots + B(\alpha_n\mathbf{e}_n, \mathbf{y}) =$$
$$= \alpha_1 B(\mathbf{e}_1,\mathbf{y}) + \ldots + \alpha_n B(\mathbf{e}_n,\mathbf{y}) = \underbrace{[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]}_{=[\mathbf{x}]_E^T} \cdot \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1,\mathbf{y}) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n,\mathbf{y}) \end{bmatrix} =$$

[18] Podobně se například dá pro každou funkci definovat rozklad na sudou a lichou část, tj. $f(x) = f_s(x) + f_l(x)$, kde $f_s(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)),\ f_l(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

$$= [\mathbf{x}]_E^T \cdot \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \beta_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \beta_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} = [\mathbf{x}]_E^T \cdot \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \beta_1\mathbf{e}_1) + \ldots + B(\mathbf{e}_1, \beta_n\mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \beta_1\mathbf{e}_1) + \ldots + B(\mathbf{e}_n, \beta_n\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} =$$

$$= [\mathbf{x}]_E^T \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \ldots + \beta_n B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ \beta_1 B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) + \ldots + \beta_n B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix} = [\mathbf{x}]_E^T \cdot \begin{bmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cdots & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \cdots & B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}}_{=[\mathbf{y}]_E}.$$

Takže co jsme zjistili? Pokud máme bázi E, tak lze působení bilineární formy převést na násobení matice se dvěma vektory, konkrétně

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_E^T \, \mathbb{B}_E \, [\mathbf{y}]_E \, ,$$

kde

$$[\mathbb{B}_E]_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Matici $\mathbb{B}_E$ nazýváme **maticí bilineární formy** B **vzhledem k bázi** E.

- Všimněme si, že matice bilineární formy je **vždy čtvercová**. Obecně může mít bilineární forma různé matice pro různé báze, nicméně platí, že pokud je forma B symetrická, je matice $\mathbb{B}_E$ vždy také symetrická bez ohledu na E. Pokud je antisymetrická, je i příslušná matice antisymetrická, tzn. $[\mathbb{B}_E]_{ij} = -[\mathbb{B}_E]_{ji}$.[19]
  Uveďme si stručně ještě několik pozorování:
  - Matice antisymetrické formy musí mít na diagonále nuly.
  - Už víme, že je-li B forma symetrická, tak $B_S = B, \quad B_A = 0$. Totéž se dá analogicky říct o maticích, tedy $\mathbb{B}_{S_E} = \mathbb{B}_E, \; \mathbb{B}_{A_E} = \mathbf{O}$.
  - Je-li forma antisymetrická, platí to analogicky, tzn. $\mathbb{B}_{A_E} = \mathbb{B}_E, \; \mathbb{B}_{S_E} = \mathbf{O}$.
- **Př.:** Mějme bilineární formu $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + 5x_2y_1.$$

  Určeme její matici vzhledem ke standardní bázi $E_2 = \{[1, 0], [0, 1]\}$.

[19] Takže vidíme, že i čtvercová matice se dá rozložit na symetrickou a antisymetrickou část, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_A$, kde $\mathbf{A}_S = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right), \quad \mathbf{A}_A = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$.

Máme 2 prvky báze, takže hledaná matice bude mít rozměry 2×2. Hledáme tedy 4 prvky, které nalezneme dosazováním bázových vektorů:

$$B([1,0],[1,0]) = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 1 = 3,$$

$$B([1,0],[0,1]) = 3 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = -1,$$

$$B([0,1],[1,0]) = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5,$$

$$B([0,1],[0,1]) = 3 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 0 = 5,$$

takže matice zadané formy B vzhledem k bázi E_2 je

$$\mathbb{B}_{E_2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kdybychom nyní chtěli např. najít $B([2,5],[1,1])$, tak by stačilo nalézt souřadnice těchto vektorů a pronásobit s maticí. Ale protože máme standardní bázi, vektory jsou samy sobě souřadnicemi, takže můžeme rovnou počítat:

$$B([2,5],[1,1]) = [2,5] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [2,5] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 + 30 = \underline{\underline{34}}$$

- **Pozn.:** Všimněme si, že jsme vlastně vůbec nemuseli vypočítávat jednotlivé prvky matice $\mathbb{B}_{E_2}$. Vzhledem k tomu, že jsme konstruovali matici vzhledem ke standardní bázi, bylo možné matici vyčíst rovnou z předpisu formy B, a to podle indexů složek vektorů a čísel u nich:

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + 5x_2y_1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{B}_{E_2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Takhle to lze provést kdykoliv konstruujeme vzhledem ke standardní bázi, takže např. pro formu $D(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 15x_1y_2 - 4x_2y_1$ bychom dostali matici $\mathbb{D}_{E_2} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 15 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix}\right]$. U jiné než standardní báze to však takhle jednoduše nejde, a musíme skutečně jednotlivé prvky matice spočítat.

- **Př.:** Mějme opět formu

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + 5x_2y_1$$

a bázi $F = \{[2,-1], [-1,2]\}$. Nalezněme $\mathbb{B}_F$.

$$B([2,-1],[2,-1]) = 3\cdot 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) - 2\cdot(-1) + 5\cdot(-1)\cdot 2 = 5,$$

$$B([2,-1],[-1,2]) = 3\cdot 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 - 2\cdot 2 + 5\cdot(-1)\cdot(-1) = -7,$$

$$B([-1,2],[2,-1]) = 3\cdot(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-1) - (-1)\cdot(-1) + 5\cdot 2\cdot 2 = 11,$$

$$B([-1,2],[-1,2]) = 3\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2 - 2\cdot(-1) + 5\cdot(-1)\cdot 2 = -1,$$

takže $\mathbb{B}_F = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -7 \\ 11 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. Kdybychom nyní chtěli najít $B([2,5],[1,1])$, museli bychom nejprve oba vektory vyjádřit v souřadnicích báze F:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 3 \\ \alpha_2 & = & 4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 1 \\ \alpha_2 & = & 1 \end{array}$$

$$B([2,5],[1,1]) = [3,4]\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 11 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [3,4]\begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} = \underline{\underline{34}}.$$

Takže vidíme, že i když jsme výpočet provedli v jiné bázi, vyšlo nám to, co předtím (tak to má být). Přechod do jiné báze nám může usnadnit výpočty, jak ilustruje následující příklad:

- **Př.:** Nechť $B : U \times U \to \mathbb{R}$ je bilineární forma definovaná předpisem

$$B(f,g) = \int\limits_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

přičemž $U = \mathrm{Lin}\ E$ je podprostor prostoru funkcí spojitých na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$,
a $E = \{1, \cos x, \sin x\}$. Nalezněme matici $\mathbb{B}_E$ a spočítejme pomocí ní

$$\int\limits_0^\pi \Big[(2 + 2\cos x - \sin x)\cdot(6 - 5\cos x + 3\sin x)\Big]\mathrm{d}x.$$

Máme 3 bázové prvky, takže hledaná matice bude mít rozměr 3×3. To znamená, že bychom měli spočítat 9 prvků, tedy 9 integrálů. Jelikož je však forma na první pohled symetrická, stačí nám spočítat prvky na a nad diagonálou, tj. 6 prvků, prvky pod diagonálou budou symetricky:

$$[\mathbb{B}_E]_{11} = B(1,1) = \int\limits_0^{\pi} 1 \cdot 1 \mathrm{d}x = \pi,$$

$$[\mathbb{B}_E]_{12} = B(1,\cos x) = \int\limits_0^{\pi} 1 \cdot \cos x \mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi} = 0,$$

$$[\mathbb{B}_E]_{13} = B(1,\sin x) = \int\limits_0^{\pi} 1 \cdot \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = 2,$$

$$[\mathbb{B}_E]_{23} = B(\cos x,\sin x) = \int\limits_0^{\pi} \cos x \sin x \mathrm{d}x \overset{substituce}{=} \int\limits_0^{0} t \mathrm{d}t = 0,$$

$$[\mathbb{B}_E]_{22} = B(\cos x,\cos x) = \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$[\mathbb{B}_E]_{33} = B(\sin x,\sin x) = \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

A protože $[\mathbb{B}_E]_{21} = [\mathbb{B}_E]_{12}, [\mathbb{B}_E]_{31} = [\mathbb{B}_E]_{13}, [\mathbb{B}_E]_{32} = [\mathbb{B}_E]_{23}$, tak dostáváme

$$\mathbb{B}_E = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 2 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}.$$

Abychom nyní spočítali zadaný integrál, stačí najít souřadnice uvedených funkcí, nicméně vzhledem ke zvolené bázi je evidentní, že $[2+2\cos x - \sin x]_E = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ a $[6-5\cos x + 3\sin x]_E = \left[\begin{smallmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$. Zadaný integrál je tedy roven

$$[2,2,-1] \begin{bmatrix} \pi & 0 & 2 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = [2,2,-1] \begin{bmatrix} 6\pi + 6 \\ -\frac{5}{2}\pi \\ 12 + \frac{3}{2}\pi \end{bmatrix} = 12\pi + 12 - 5\pi - 12 - \frac{3}{2}\pi = \underline{\underline{\frac{11}{2}\pi}}.$$

10 Kvadratické formy a jejich klasifikace

- Mějme bilineární formu $B : U \times U \to \mathbb{R}$. Zobrazení $Q_B : U \to \mathbb{R}$ definované předpisem
$$Q_B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$
nazýváme **kvadratickou formou** příslušnou bilineární formě B, případně sdruženou s bilineární formou B.

  Nejde tedy o nic jiného, než že do bilineární formy dosadíme za obě proměnné stejný objekt.

- **Př.:** Již víme, že skalární součin dvourozměrných vektorů, tj. zobrazení
$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$
je bilineární forma. Když dosadíme za obě proměnné $\mathbf{x}$, dostáváme příslušnou kvadratickou formu
$$Q_B(\mathbf{x}) = x_1 x_1 + x_2 x_2 = x_1^2 + x_2^2.$$
Hodnota této kvadratické formy odpovídá druhé mocnině velikosti vektoru $\mathbf{x}$.

- Je otázkou, jak poznat, zda je dané zobrazení kvadratickou formou. Již víme, že každá bilineární forma má svou symetrickou část. Dá se ukázat, že pro ni platí
$$B_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(Q_B(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - Q_B(\mathbf{x}) - Q_B(\mathbf{y})\right),$$
což se dá jednoduše ověřit, když víme, že $B_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{x})\right)$ a $Q_B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$:
$$\underline{\frac{1}{2}\left(Q_B(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - Q_B(\mathbf{x}) - Q_B(\mathbf{y})\right)} = \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - B(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right) \overset{bilinearita}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{y}) - B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - B(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right) \overset{bilinearita}{=} \frac{1}{2}\left(B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{x})\right) = \underline{B_S(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \checkmark$$
Každá symetrická bilineární forma se tedy dá zapsat pomocí příslušné kvadratické formy. Budeme-li tedy ověřovat, zda je nějaké zobrazení Q kvadratickou formou, napíšeme si, jak vypadá $\frac{1}{2}\left(Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})\right)$, výsledkem musí být symetrická bilineární forma. Pokud tomu tak není, forma Q není kvadratická.

- **Př.:** Ukažme, že zobrazení $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem
$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 x_2$$
je kvadratická forma.

Nejprve musíme vyjádřit $\frac{1}{2}\left(Q(\mathbf{x}+\mathbf{y})-Q(\mathbf{x})-Q(\mathbf{y})\right)$:

$$\frac{1}{2}\left(Q(\mathbf{x}+\mathbf{y})-Q(\mathbf{x})-Q(\mathbf{y})\right)=\frac{1}{2}\left((x_1+y_1)^2-2(x_1+y_1)(x_2+y_2)-(x_1^2-2x_1x_2)-(y_1^2-2y_1y_2)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_1^2+2x_1y_1+y_1^2-2x_1x_2-2x_1y_2-2x_2y_1-2y_1y_2-x_1^2+2x_1x_2-y_1^2+2y_1y_2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1\right)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1\overset{ozn.}{=:}B(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Zbývá, ověřit, že B je symetrická bilineární forma.

Pozn.: Je lepší nejprve ověřit symetrii - jednak je to jednodušší, a kdyby nebyla symetrie splněna, tak už nemusíme ověřovat bilinearitu, protože Q by tak či tak nemohla být kvadratická forma. A pokud zjistíme, že B symetrická je, tak už víme, že k ověření bilinearity stačí ověřit linearitu jen v jedné proměnné, takže si také ušetříme práci.

$$\text{symetrie: } B(\mathbf{y},\mathbf{x})=y_1x_1-y_1x_2-y_2x_1=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1=B(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \checkmark$$

$$\text{bilinearita: } \underline{B(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})}=(x_1+y_1)z_1-(x_1+y_1)z_2-(x_2+y_2)z_1=$$

$$=x_1z_1-x_1z_2-x_2z_1+y_1z_1-y_1z_2-y_2z_1=\underline{B(\mathbf{x},\mathbf{z})+B(\mathbf{y},\mathbf{z})}\ \checkmark$$

$$\underline{B(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})}=(\alpha x_1)y_1-(\alpha x_1)y_2-(\alpha x_2)y_1=\alpha(x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1)=\underline{\alpha B(\mathbf{x},\mathbf{y})}\ \checkmark$$

<u>Takže forma Q je skutečně kvadratická.</u>

- Pro matici kvadratické formy vzhledem k bázi E platí

$$\mathbb{Q}_{B_E}=\mathbb{B}_{S_E}.$$

- **Př.:** Nalezněme matici kvadratické formy z předchozího příkladu, vzhledem ke standardní bázi E_2.

V minulém příkladě jsme zjistili, že příslušná symetrická bilineární forma má tvar

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y})=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1.$$

Matice kvadratické formy bude stejná jako matice této bilineární formy. Jelikož máme standardní bázi, už víme, že prvky matice lze vyčíst přímo z předpisu a ke konstrukci matice není třeba dosazovat bázové prvky:

$$\mathbb{Q}_{E_2}=\mathbb{B}_{E_2}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}}}.$$

Ověřme si, že všechno sedí nalezením $Q([1,2])$:

$$Q([1,2]) = [1,2]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1,2]\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3,$$

což odpovídá výsledku obdrženém dosazení do předpisu formy Q:

$$Q([1,2]) = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = -3.$$

Pokud bychom měli jinou než standardní bázi, získali bychom matici dosazováním, k nalezení obrazu vektoru bychom pak museli určit souřadnice tohoto vektoru v dané bázi, stejně jako u bilineárních forem.

Pozn.: Podobně jako u bilineárních forem, máme-li kvadratickou formu Q, a chceme zkonstruovat její matici vzhledem ke standardní bázi, můžeme tak učinit přímo z předpisu - čísla u členů s mocninou budou na diagonále, čísla u smíšených členů vydělíme 2 a dosadíme do příslušných pozic „naproti sobě“. Např. pro formu

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 7x_2^2 + 6x_2x_3 - 5x_3^2$$

bychom dostali matici

$$\mathbb{Q}_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

- Mějme kvadratickou formu $Q : U \to \mathbb{R}$. Tuto formu nazveme
  - **Pozitivně definitní**, jestliže $\forall \mathbf{x} \neq 0 : \; Q(\mathbf{x}) > 0$,
  - **Pozitivně semidefinitní**, jestliže $\forall \mathbf{x} \neq 0 : \; Q(\mathbf{x}) \geq 0$,
  - **Negativně definitní**, jestliže $\forall \mathbf{x} \neq 0 : \; Q(\mathbf{x}) < 0$,
  - **Negativně semidefinitní**, jestliže $\forall \mathbf{x} \neq 0 : \; Q(\mathbf{x}) \leq 0$,
  - **Indefinitní**, jestliže neplatí žádný z předchozích bodů.

  Příslušnou symetrickou bilineární formu, sdruženou s Q pak označujeme stejným způsobem. Jelikož každé kvadratické formě přísluší i symetrická matice, o symetrických maticích pak mluvíme stejně, tzn. symetrická matice A je pozitivně definitní, jestliže pro nenulový vektor $\mathbf{x}$ platí $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ atd.

- Znalost toho, do jaké z výše uvedených „kategorií“ daná forma/matice spadá, je zcela klíčová pro spoustu aplikací. Především v optimalizaci, která se využívá v úlohách mechaniky, umělé inteligenci atd., je tato znalost nezbytná k funkčnosti vybraných metod, jindy je zase nutná k interpretaci výsledku. Ostatně už z MA2 znáte příklad: K určení toho, zda se ve stacionárním bodě vícerozměrné funkce nachází minimum, maximum či sedlový bod je třeba vědět, zda je Hessova matice v tomto bodě pozitivně/negativně definitní nebo indefinitní. My si ukážeme, jak klasifikovat kvadratické formy pomocí tzv. **kongruencí**.

- Matice A a B nazveme **kongruentní**, pokud existuje regulární matice T taková, že

$$B = TAT^T.$$

  Platí, že matice A a B pak patří do „stejné kategorie“, tj. je-li například A pozitivně definitní, pak je pozitivně definitní i s ní kongruentní matice B atd.

- Vzpomeňme si na jednu věc - elementární řádkové úpravy v matici A šlo napsat pomocí násobení matice transformační maticí T zleva. Pokud bychom tuto matici transponovali a násobili zprava, provedeme totožnou úpravu na sloupcích. Pokud bychom měli symetrickou matici A, tak z toho plyne, že $B = TAT^T$ bude diagonální matice.

- U diagonální matice poznáme kam patří podle jejích diagonálních prvků - jsou-li všechny kladné, je matice pozitivně definitní. Pokud jsou všechny záporné je negativně definitní. Pokud jsou tam i nuly, pak je semidefinitní. A pokud se objevují prvky obou znamének je indefinitní. Např.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{....pozitivně definitní,} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{....pozitivně semidefinitní,}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{....negativně definitní,} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{....negativně semidefinitní,}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{....indefinitní.}$$

- Takže jak poznáme, jaká je forma Q? Vezmeme její matici (klidně vzhledem ke standardní bázi), upravíme na schodový tvar, přičemž stejné úpravy budeme provádět i na sloupcích. Jakmile nám vyjde diagonální matice, klasifikujeme formu Q podle diagonálních prvků.

- **Př.:** Klasifikujme kvadratickou formu z předchozího příkladu, tj. $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2$:

  Ve zmíněném příkladu jsme našli matici této formy, upravíme ji tedy kongruentně na diagonální matici:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \end{matrix} \sim \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

  na diagonále máme kladné i záporné číslo, forma Q je tedy indefinitní.

11 Determinant, jeho výpočet a využití

- Než půjdeme k definicím, řekněme si stručně něco úvodem. Determinant je zobrazení, které čtvercové matici přiřadí nějaké číslo, mající svůj význam. Je užitečný především díky tomu, že pro malé rozměry matic pomocí něj lze explicitně řešit soustavy rovnic, nalézat inverze, určovat pozitivní či negativní definitnost[20] apod. Má svůj význam při substituci v obecných integrálech (vícerozměrné, křivkové, plošné,...)[21], mají svůj geometrický význam, užitečný pro výpočty obsahů, objemů,... Nutno však podotknout, že toto se oplatí pro relativně malé matice, neboť výpočet determinantu je vcelku výpočetně náročný.

- Mějme $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Symbolem M_{ij}^A budeme značit matici, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Takovéto matici se říká **minor** matice A vzhledem k prvku a_{ij}. Např.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad M_{11}^A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad M_{12}^A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad M_{23}^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Pozn.: Všimněme si, že pokud má matice dimenzi n, n, její minory mají dimenzi $n-1, n-1$.

- **Determinant** čtvercové matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ se značí $\det A$, případně $|A|$, a jedná se o číslo, které se vypočítá rekurzivně:

  - Pro $n = 1$ máme $A = a_{11}$ a $\det A = a_{11}$,
  - pro $n > 1$ si zvolíme $i \in \{1, \dots, n\}$ a počítáme

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}^A,$$

případně

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det M_{ji}^A.$$

V praxi to znamená, že si vybereme řádek (první suma) nebo sloupec (druhá suma), a pro každý prvek v tomto řádku/sloupci spočítáme determinant příslušného minoru a vynásobíme daným prvkem. Znaménko je plus, pokud je součet indexů sudý, jinak mínus. Jaká je dimenze matice, tolik máme sčítanců. Tomuto postupu se říká **rozvoj podle $i-$tého řádku** (případně sloupce).

[20]Znáte z MA2 - Sylvesterovo kritérium

[21]Také něco z toho znáte z MA2 - při substituci do polárních souřadnic násobíme integrand členem r, což je determinant Jacobiho matice pro substituci do polárních souřadnic, podobně u sférických, válcových atd.

Dílčí determinanty minorů můžeme počítat zase stejně, jak vidíme, jedná se o jednoduše algoritmizovatelný, ale výpočetně velice náročný postup[22]. Proto je při tomto rekurzivním výpočtu vhodné zvolit si řádek či sloupec, kde je co nejvíce nul.

- **Př.:** Pomocí rekurentního předpisu se jednoduše ověří, že pro 2-rozměrné matice platí křížové pravidlo, tzn. $\det\left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Je jedno, jestli budeme počítat podle prvního či druhého řádku nebo snad sloupce, pro ukázku proveďme rozvoj podle prvního řádku:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det [a_{22}] + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot \det [a_{21}] =$$

$$= (-1)^2 a_{11}a_{22} + (-1)^3 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- **Př.:** Spočítejme

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Je celkem jedno, podle kterého řádku či sloupce uděláme rozvoj, ale vzhledem k výskytu nuly se nabízí první řádek:

$$\det \begin{bmatrix} \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \color{green}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \color{red}{(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} + \underbrace{\color{blue}{(-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}}_{=0} + \color{green}{(-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}} =$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) + 2 \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2)) = -2 + 10 = \underline{\underline{8}}$$

- Všimněme si, že z rekurzivního předpisu plyne triviálně jednoduchý výpočet determinantu pro trojúhelníkovou matici, vezměme např. horní trojúhelníkovou. Uděláme-li rozvoj podle prvního sloupce, máme jediný nenulový prvek, ostatní sčítance se vynulují, máme tedy a_{11} krát determinant zbylé matice. Ta je zase horní trojúhelníková! Takže zase bude jediný nenulový sčítanec ve výpočtu determinantu. Opakováním tohoto postupu dostaneme, že

[22] Pro výpočet determinantu 4-rozměrné matice musíme spočítat 4 determinanty 3-rozměrných minorů, ke každému z nich potřebujeme další 3 dílčí determinanty jejich 2-rozměrných minorů, potřebujeme tedy spočítat 12 dílčích determinantů 2-rozměrných matic. Kdybychom počítali determinant matice 5 na 5, už by jich bylo 60, pro matici 6 na 6 by jich bylo 360, pro 7 na 7 zase 2520 atd.

pro horní trojúhelníkovou matici platí

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Jelikož matice umíme pomocí elementárních řádkových úprav do této podoby dostat, zbývá otázka, jak se řádkové úpravy podepíšou na determinantu:

- Výměna řádků otočí znaménko determinantu,
- násobení řádku číslem vynásobí stejným číslem i determinant,
- přičtení násobku jiného řádku k dalšímu determinant nezmění.

Pozn.: Všimněme si, že z těchto skutečností mimo jiné plyne, že determinant singulární matice je vždy nulový.

- **Př.:** Spočítejme pomocí úpravy na trojúhelníkovou matici

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Když k řádku připočteme násobek jiného, nic se nezmění, vadí pouze když nějaký řádek explicitně vynásobíme číslem, pak musíme stejným číslem determinant vydělit, abychom jej nezměnili. Při výměně řádků otočíme znaménko před determinantem:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ -3\mathbf{r}_1 \\ -2\mathbf{r}_1 \\ +\mathbf{r}_1 \end{array} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 2\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2 \\ \\ \end{array} =$$

$$= \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \mathbf{r}_3 \\ \updownarrow \\ \mathbf{r}_4 \end{array} = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot(1\cdot(-2)\cdot 3\cdot 1) = \underline{\underline{3}}$$

- Pomocí determinantu se dá explicitně vypočítat řešení soustavy rovnic. Máme-li matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}, b \in \mathbb{R}^n$ a soustavu
$$A\mathbf{x} = b,$$
pak platí
$$x_i = \frac{\det A_i^b}{\det A},$$
přičemž matice A_i^b je matice, která vznikne, když místo $i-$tého sloupce v matici A vezmeme pravou stranu b. Např. pro
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
bychom měli
$$A_1^b = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad A_2^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 7 & -1 & 9 \end{bmatrix}, \qquad A_3^b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \end{bmatrix}.$$
Takovémuto výpočtu neznámých se říká **Cramerovo pravidlo**

- **Př.:** Vyřešme pomocí Cramerova pravidla soustavu danou rozšířenou maticí
$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$
Nejprve potřebujeme určit $\det A$:
$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (1 \cdot 1 \cdot (-6) \cdot 13) = -13$$

Budeme-li nyní chtít nalézt např. x_1, musíme určit $\det A_1^b$:

$$\det A_1^b = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -26 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \cdot (-1 \cdot 7 \cdot (-26 \cdot 1) = 26,$$

takže

$$x_1 = \frac{\det A_1^b}{\det A} = \frac{26}{-13} = -2.$$

Podobně bychom zjistili, že $\det A_2^b = 0$, $\det A_3^b = -13$, $\det A_4^b = -26$ a tím pádem $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ (vyzkoušejte si).

- Cramerovo pravidlo samozřejmě funguje pouze pokud $\det A \neq 0$, což jinak řečeno znamená, že soustava má právě jedno řešení. Pokud vyjde nulový determinant, stačí aby jediný z determinantů A_i^b vyšel nenulový a soustava jistě nemá řešení. Pokud jsou všechny nulové, nevíme nic, pouze u soustav 2 na 2 to znamená nekonečno řešení, u vyšších dimenzí záleží na počtu lineárně závislých sloupců matice.

- Matici

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det M_{11}^A & (-1)^{2+1} \det M_{21}^A & \cdots & (-1)^{n+1} \det M_{n1}^A \\ (-1)^{1+2} \det M_{12}^A & (-1)^{2+2} \det M_{22}^A & \cdots & (-1)^{n+2} \det M_{n2}^A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det M_{1n}^A & (-1)^{2+n} \det M_{2n}^A & \cdots & (-1)^{n+n} \det M_{nn}^A \end{bmatrix}$$

nazýváme maticí **adjungovanou** k matici A. Platí, že

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

Nevěříte? Věřte:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \tilde{A} & \Big/ \cdot \det A \\ \det A \cdot A^{-1} &= \tilde{A} & \Big/ A \cdot \\ \det A \cdot \mathbf{I} &= A\tilde{A} \end{aligned}$$

Když se nyní podíváme, jak vypadá $[A\tilde{A}]_{ij}$, zjistíme, že dostaneme

$$[A\tilde{A}]_{ij} = a_{i1}(-1)^{j+1} \det M^A_{j1} + \ldots + a_{in}(-1)^{j+n} \det M^A_{jn}.$$

Nyní se pojďme podívat, co nám to vlastně říká. Pokud $i = j$, není to nic jiného, než rozvoj podle i-tého řádku, tedy vidíme, že $[A\tilde{A}]_{ii} = \det A$. V opačném případě si stačí rozmyslet, že by opět šlo o determinant, pokud bychom v matici A nahradili j-tý řádek i-tým řádkem. Jenže taková matice by měla dva řádky stejné (samozřejmě i-tý a j-tý), byla by tedy jasně singulární. A víme, že determinant singulární matice je roven 0. Pokud si to shrneme, tak jsme zjistili

$$[A\tilde{A}]_{ij} = \begin{cases} \det A, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

$$\Downarrow$$

$$A\tilde{A} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot \mathbf{I}$$

Pozn.: Mimochodem, Cramerovo pravidlo není nic jiného, než důsledek výše uvedeného vzorce pro inverzi, stačí si řešení soustavy napsat jako $\mathbf{x} = A^{-1}b$ a použít podobnou úvahu typu „tohle by byl determinant, kdybychom tady něco nahradili“.

- **Př.** Najděte pomocí determinantu inverzi matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 3,$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (-1)^2 \det 2 & (-1)^3 \det(-1) \\ (-1)^3 \det(-1) & (-1)^4 \det 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}}.$$

12 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

- Mějme čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, **nenulový** vektor $v \in \mathbb{C}^n$ a číslo $\lambda \in \mathbb{C}$. Pokud platí

$$Av = \lambda v,$$

pak o čísle λ hovoříme jako o **vlastním čísle matice** A a o vektoru v jako o **vlastním vektoru, sdruženém s** λ. Množinu všech vlastních čísel matice A nazýváme **spektrum** matice A a značíme jej $\sigma(A)$.

- Spektrum spolu s vlastními vektory obsahuje v zásadě kompletní informaci o matici. No dobře, ale jak je najdeme? A proč by nás vůbec tyhle věci měly zajímat?

Aplikační okénko: V případě symetrické matice pomocí vlastních čísel můžeme určit zda je pozitivně definitní, negativně definitní apod. Ale především, obrovské množství aplikací vlastních čísel nalezneme v modelování sítí (doprava, Google, Facebook, dsitribuční sítě, populační modely...), mají význam ve vlnění (třeba šíření Wi-Fi signálu nebo modelování zvukových vibrací v autě), statice (tzv. vlastní frekvence, ke kterým nesmí dojít, nemá-li se stavba rozsypat; tvarová optimalizace stavebních prvků apod.), částicové fyzice (vlastní čísla tzv. Hamiltonova operátoru odpovídají přípustným energetickým hladinám kvantového systému), znalost spektra velkých matic je umožňuje účinně ukládat s menšími nároky na paměť, dají se pomocí nich definovat funkce matic (co to je např $\mathrm{e}^A, \cos(A), ...?$)... Významných aplikací je nepřeberné množství. Snad je nyní již uvěřitelné, že občas se hodí vlastní čísla a vlastní vektory znát.

- A jak je tedy nalezneme? Má platit $Av = \lambda v$. To se dá jinak zapsat jako $Av - \lambda v = \mathbf{o}$. Pokud nyní vytkneme zprava vektor v, dostaneme $(A - \lambda I)v = \mathbf{o}$. To je v podstatě soustava rovnic s maticí $A - \lambda I$ a nulovou pravou stranou. Jenže z definice, vektor v má být nenulový! Jak z nenulového vektoru násobením s maticí dostaneme nulový vektor? Jediná možnost je, že matice $A - \lambda I$ je **singulární** (rozmyslete si). A singulární matice musí mít nulový determinant, takže jsme zjistili, že vlastní čísla získáme z rovnice

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0.$$

Polynom $p(\lambda)$ (tj. výraz $\det(A - \lambda I)$) nazýváme **charakteristickým polynomem** matice A. Jeho kořeny jsou tedy vlastní čísla. Jakmile dostaneme vlastní čísla, získáme pro každé vlastní číslo λ_k příslušný vlastní vektor v_{λ_k} řešením soustavy $(A - \lambda_k I)v_{\lambda_k} = \mathbf{o}$.

- **Př.:** Nalezněme vlastní čísla a vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nejprve sestavíme charakteristický polynom:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - 1 \cdot (-1) = \lambda^2 + 1.$$

Vlastní čísla musí splňovat $p(\lambda) = 0$ čili dostáváme

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \sqrt{-1} = \pm i.$$

Jak vidíme, ačkoliv máme reálnou matici, dostali jsme komplexní vlastní čísla. Ale to teď nechme stranou, nalezněme ještě vlastní vektory:

$$\lambda_1 = i: \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 0-i & -1 & 0 \\ 1 & 0-i & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ i\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} t \cdot i \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}, \ t \neq 0.$$

Podobně bychom dostali pro $\lambda_2 = -i$, že $v_{\lambda_2} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$. Možná teď někoho můžou napadnout určité otázky. Např.:

- **Ono může vyjít nekonečno vlastních vektorů?**
  Ano, každému vlastnímu číslu odpovídá nekonečno vlastních vektorů, lišících se přinejmenším o násobek. Je to jasné i z rovnosti $Av = \lambda v$, když se nad tím zamyslíte. To nám mimo jiné dává možnost volit si vlastní vektor tak, aby splňoval nějaké dodatečné vlastnosti (tj. „velikost“, největší složka apod.).
- **Proč $t \neq 0$?**
  Protože vlastní vektor je z principu nenulový. Nezapomínejte např. u zkoušky na tento aspekt, zbytečně byste třeba přišli o bod.

Pozn.: Z výše uvedeného plyne, že pokud vícenásobná vlastní čísla (vícenásobný kořen) budeme chápat jako různá vlastní čísla o stejné hodnotě, pak má matice o rozměrech n, n právě n (obecně komplexních) vlastních čísel. Navíc rozlišujeme **algebraickou** a **geometrickou** násobnost vlastních čísel. Algebraická násobnost je právě násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu. Geometrická násobnost je defekt (tj. dimenze jádra) matice $A - \lambda I$. To se někdo nudil a nazval jednu věc dvěma způsoby, říkáte si. A ono ne, ta dvě čísla se mohou lišit! Můžete si lehce ověřit třeba na matici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

která má vlastní číslo $\lambda = 1$ s algebraickou násobností 2, nicméně jeho geometrická násobnost je 1. Skutečně, pro $\lambda = 1$ máme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

což je matice, která má na první pohled defekt 1 (jeden nulový řádek při schodovém tvaru).

Obecně platí, že geometrická násobnost je vždy menší nebo rovna algebraické. A jakýže má význam geometrická násobnost? Je to dimenze prostoru vlastních vektorů, příslušejících danému vlastnímu číslu. [23] Oba druhy násobností jsou si rovny právě tehdy, je-li zadaná matice A diagonalizovatelná (tj. pokud existuje regulární T tak, že TAT^{-1} je diagonální).

- Z výpočtu vlastních čísel, jaký jsme si uvedli, je zřejmé, že trojúhelníková matice má vlastní čísla přímo na diagonále, tj. např. matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 15 & 12 \\ 0 & 0 & 19 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 96 \end{bmatrix}$$

  má spektrum $\sigma(A) = \{2, 7, 19, 96\}$.

- Jelikož stupeň charakteristického polynomu odpovídá dimenzi matice, situace je trochu složitější s maticemi vyšších dimenzí:

Př.: Nalezněme vlastní čísla matice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Opět, sestavíme charakteristický polynom (např. rozvojem podle prvního řádku):

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 6 \\ 1 & -\lambda & -11 \\ 0 & 1 & 6-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda\left[-\lambda(6-\lambda) - 1\cdot(-11)\right] + (-1)\cdot 0 + 6\cdot\left[1\cdot 1 - 0\cdot(-\lambda)\right] =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 11) + 6 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 11) - (\lambda^2 - 6\lambda + 5) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 11) - (1-\lambda)(5-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3),$$

takže

$$\lambda \in \sigma(M) \quad \Leftrightarrow \quad p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

[23] Různé vlastní vektory, příslušející danému vlastnímu číslu, se tedy nemusí lišit pouze násobkem!

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3}}\,.$$

Polynom jsme zde trochu „trikově“ upravili na součin závorek, samozřejmě jsme mohli jednoduše vše roznásobit a kořeny výsledného polynomu 3. stupně nalézt pomocí Cardanových vzorců (za mě ne, díky). Situace je nicméně velmi prostá ve chvíli, kdy je matice dimenze 3 singulární, tedy má nulové vlastní číslo (prostě bychom vytkli λ a zůstal by nám kvadratický polynom).

- Pokud se zamyslíte nad předchozím příkladem a jeho dovětkem, asi Vás napadne zjevný problém: Co s maticí dimenze 5 a vyšší? Pro kořeny polynomu 5. a vyššího stupně bohužel neexistuje analytický vzorec, vlastní čísla větších matic se tak prakticky výlučně hledají numericky. Většinou však nikoliv hledáním kořenů charakteristického polynomu, ale sofistikovanějšími algoritmy. Tyto pokročilejší „finty“ však samozřejmě stojí mimo jiné na základních zákonitostech, o kterých se zde bavíme. To kdyby náhodou někoho napadlo „Tak proč se teda učíme je spočítat na papír?“ No, přesně proto.

- Celá úvaha se dokonce dá otočit: S využitím zmíněných algoritmů na hledání vlastních čísel můžeme účinně nalézt kořeny funkcí, které se dají dostatečně přesně (to jest na počítačovou přesnost) nahradit polynomem. Ze souřadnic aproximujícího polynomu v příslušné bázi lze sestavit matici, jejíž vlastní čísla jsou totožná s kořeny polynomu. Jak tuto matici sestavit záleží na příslušné bázi.

  Např. pro „standardní“ bázi $1, x, x^2, x^3, \ldots$ se této matici říká *companion matrix*, tedy v překladu něco jako „souputnická“ nebo „přidružená“ matice. Platí: [24]

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \sigma(C),\ \text{kde } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

- Pro spektra se dá dokázat několik zajímavých vlastností, například (vyzkoušejte si):
  - $\sigma(AB) = \sigma(BA)$,
  - podobné matice mají stejná vlastní čísla, tj. pokud X je regulární, tak platí

$$XAX^{-1} = B \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(A) = \sigma(B),$$

[24] Jestlipak uhodnete, jak jsem dal dohromady matici M výše? :)

– pokud λ je vlastním číslem matice A, pak $\lambda + q$ je vlastním číslem matice $A + qI$,
– $A = A^T \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) \subset \mathbb{R}$,
– $A = -A^T \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\ z = 0\}$,
– $A = A^T \quad \Rightarrow$ různé vl. vektory v_k, v_l jsou na sebe kolmé, tj. $v_k^T v_j = v_l^T v_k = 0$.

- Občas je nalezení vlastních čísel příliš těžké, a zároveň nám občas stačí čistě odhadnout oblast, v níž se pohybují. K tomu slouží tzv. **Geršgorinova věta**:

Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Označme $R_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} |a_{jk}|, S_j = \{z \in \mathbb{C} : \ |a_{jj} - z| \leq R_j\}$. Pak pro spektrum matice A platí

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_k.$$

Vypadá to obludně, ale co to vlastně je? S_j je kruh v komplexní rovině, se středem v čísle a_{jj} (tzn. j-tý prvek na diagonále matice A) a poloměrem R_j, což je součet absolutních hodnot prvků na j-tém řádku, vyjma toho diagonálního. Uděláme-li takovýto kruh pro každý řádek matice A, spektrum jistě leží ve sjednocení těchto kruhů. [25]

Příklad: Pomocí Geršgorinovy věty určete co nejmenší část komplexní roviny, ve které se nachází všechna vlastní čísla matice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zakreslete v komplexní rovině.

Řešení: Pro každý řádek sestavíme příslušný kruh v komplexní rovině. Středem kruhu je vždy diagonální prvek na daném řádku, poloměrem pak součet absolutních hodnot ostatních prvků na řádku:

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{7} & \color{blue}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{2} \\ \color{blue}{1} & \color{red}{4} & \color{blue}{-1} & \color{blue}{1} \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{-1} & \color{red}{-4} & \color{blue}{1} \\ \color{blue}{2} & \color{blue}{1} & \color{blue}{1} & \color{red}{0} \end{bmatrix}$$

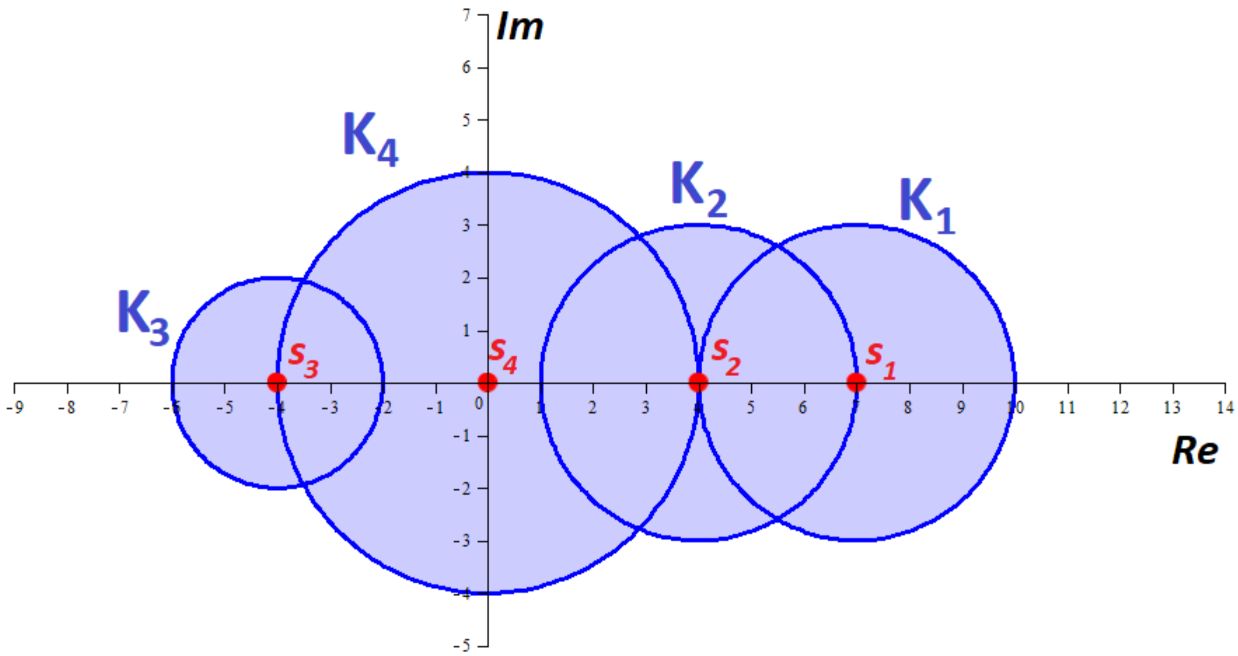
[25] Dokázat toto tvrzení lze volbou vlastních vektorů tak, aby měly největší složku rovnu 1 a ostatní menší. Zbytek jsou jen vcelku jednoduché nerovnosti.

– 1. řádek: $S_1 = 7$, $r_1 = |1| + |0| + |2| = 3$. Z prvního řádku jsme tedy dostali kruh (označme jej třeba K_1) se středem v bodě 7 a poloměrem 3. Analogicky postupujeme i pro další řádky a výsledek zakreslíme.

– 2. řádek: $S_2 = 4$, $r_2 = |1| + |-1| + |1| = 3$,

– 3. řádek: $S_3 = -4$, $r_3 = |0| + |-1| + |1| = 2$,

– 4. řádek: $S_4 = 0$, $r_4 = |2| + |1| + |1| = 4$.



Obrázek 7: Zakreslení v komplexní rovině

Jen pro úplnost, konkrétně jsou vlastní čísla zadané matice přibližně $\lambda_1 \approx 7.919$, $\lambda_2 \approx 3.825, \lambda_3 \approx -0.321, \lambda_4 \approx -4.423$, což skutečně ve sjednocení zakreslených kruhů leží. Všimněme si, že všechna vlastní čísla jsou ve skutečnosti reálná, což koresponduje s faktem, že zadaná matice byla symetrická.

- Pokud máme reálnou symetrickou matici, tak se kruh S_j stává pouhým intervalem $\langle a_{jj} - R_j, a_{jj} + R_j \rangle$. Pokud všech n intervalů bude obsahovat pouze kladná čísla, tzn. pokud pro každé j bude platit $a_{jj} > R_j$, pak je jistě matice A pozitivně definitní.

Př.: Určete číslo q tak, aby byla matice

$$\begin{bmatrix} q & -1 & 1 \\ -1 & q+1 & 3 \\ 1 & 3 & q+2 \end{bmatrix}$$

pozitivně definitní.

$$\begin{bmatrix} q & -1 & 1 \\ -1 & q+1 & 3 \\ 1 & 3 & q+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} R_1 = |-1| + |1| = 2, & S_1 = \langle q-2, q+2 \rangle, \\ R_2 = |-1| + |3| = 4, & S_2 = \langle (q+1)-4, (q+1)+4 \rangle = \langle q-3, q+5 \rangle \\ R_3 = |1| + |3| = 4, & S_3 = \langle (q+2)-4, (q+2)+4 \rangle = \langle q-2, q+6 \rangle. \end{array}$$

Vidíme, že spodní meze intervalů jsou $q-2, q-3$ a $q-2$, aby všechna tato čísla byla kladná, tak musí platit, že $\underline{\underline{q > 3}}$.

13 Skalární součin, norma, ortogonalita

- Ti z Vás, kteří ještě neví, oč půjde a už zapomněli na poznámku na okraj ze druhého cvičení, teď možná máte pocit, že si z Vás dělám srandu. Celý semestr při násobení matic a vektorů přece používáme skalární součin, to ho jako budeme probírat teď na konci? Později už to nešlo? Jenže není skalární součin jako skalární součin. Abychom si to ujasnili, uděláme si malou exkurzi do světa teorie. V tuto chvíli půjde z větší části jen o „bonusové“ znalosti, takže koho to nezajímá a netrápí, nechť přeskočí za Obrázek 8.

- Už víme, co je to vektorový prostor – zkrátka nějaká struktura, kde věci mezi sebou umíme sčítat a násobit číslem. Úplně mimo stojí jiná základní struktura, tzv. **metrický prostor**. To je nějaká množina X, opatřená *metrikou* d, která každé dvojici prvků přiřadí nějaké číslo, přičemž:

  1. $\forall x, y \in X: \quad d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
  2. $\forall x, y \in X: \quad d(x,y) = d(y,x),$
  3. $\forall x, y, z \in X: \quad d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z).$

  Jak si to představit? Metrika nám v jistém smyslu umožňuje *měřit* (odtud její název) vzdálenosti mezi prvky množiny X. Ty 3 podmínky výše jsou s ohledem na to vlastně celkem rozumné: Vzdálenost by asi úplně neměla být záporná a nulová bude pouze, pokud měřím vzdálenost od sebe sama. Ostrava od Lvova je vzdálená stejně jako Lvov od Ostravy. No a určitě neurazím menší vzdálenost, když to z jednoho místa do druhého vezmu ještě přes třetí flek (tohle je vlastně trojúhelníková nerovnost). Tak jako ve vektorovém prostoru umíme sčítat a násobit, tady tedy umíme měřit vzdálenosti a přeneseně konstruovat limity. Je zajímavé, že metrický prostor může mít libovolný počet prvků. [26]

- Bohužel, metrický a vektorový prostor obecně vzato nemají vůbec nic společného. Nebylo by fajn je spojit? Bylo! K tomu naštěstí stačí vektorový prostor opatřit tzv. **normou**, tedy zobrazením, které prvku $x \in X$ přiřadí číslo $\|x\|$, čímž dostáváme **normovaný lineární prostor**. Norma musí splňovat

  1. $\forall x \in X: \quad \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o,$
  2. $(\forall x \in X)(\forall \alpha \in \mathbb{R}): \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|,$
  3. $\forall x, y \in X: \quad \|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|.$

  Norma nám pro změnu dává nástroj, jak v jistém smyslu měřit *velikost* prvků. Opět, odtud vcelku logické výše uvedené požadavky: Záporná velikost moc smysl nemá, když vektor vynásobím číslem (-2), tak velikost zvětším 2-krát, a opět trojúhelníková nerovnost.

[26] Na rozdíl od vektorového, o kterém jsme si řekli, že může mít buď právě jeden (nulový), nebo rovnou nekonečně mnoho prvků.

A kde máme metriku? Umíme prvky sčítat (a odečítat) a umíme měřit jejich velikost. Jak změřím vzdálenost? Jako velikost rozdílu. A skutečně, dá se ukázat, že je-li $\|.\|$ norma, pak $d(x,y) = \|x-y\|$ je metrika.

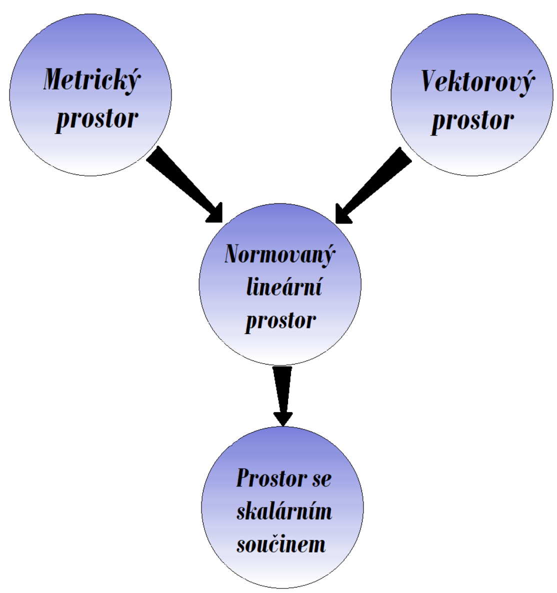
- Už umíme sčítat a odečítat prvky a násobit je číslem. Umíme měřit jejich velikost a vzdálenost. Dalo by se ještě nějak popsat pozici dvou prvků vůči sobě? Dalo! A k tomu nám konečně poslouží **skalární součin**, tedy zobrazení, které prvkům x a y přiřadí číslo (x,y), přičemž je splněno:

  1. $\forall x, y \in X: \quad (x,y) = (y,x)$,
  2. $\forall x \in X: \quad (x,x) \geq 0, \quad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = o$,
  3. $\forall x, y, z \in X: \quad (x+y,z) = (x,z) + (y,z)$,
  4. $(\forall x, y \in X)(\forall \alpha \in \mathbb{R}): \quad (\alpha x, y) = \alpha(x,y)$.

  Skalární součin pro změnu v jistém smyslu souvisí s „úhlem“ mezi objekty. Ten skalární součin, který jsme používali celý semestr, je konkrétně tzv. Eukleidovský skalární součin. Možná si ještě pamatujete ze střední školy, že pro něj platí

  $$(x,y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \alpha,$$

  kde normou zde myslíme „klasickou velikost“ vektorů a α je úhel, jenž vektory x, y svírají. Tentýž vztah se dá ukázat i pro obecnější prostory, jen se pak úhly představují dost obtížně, nicméně svůj smysl tento „úhel“ má i tak.



Obrázek 8: Postupná struktura prostorů

- Když to shrneme, **skalární součin je libovolná symetrická pozitivně definitní bilineární forma**. Kdo si četl přechozí úsek, ty podmínky, vypsané u skalárního součinu, nejsou nic jiného, než symetrie, pozitivní definitnost a bilinearita. Skalární se mu říká především proto, že jeho výsledkem je *skalár*, tedy číslo. [27]

  Už víme, že bilineární forma má vzhledem ke každé bázi svou matici. Onen „klasický" Eukleidovský skalární součin, který jsme celý semestr používali, by měl vzhledem ke standardní bázi jednotkovou matici.

- **Normou indukovanou skalárním součinem** rozumíme $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Je to tedy odmocnina z příslušné kvadratické formy.

Pozn.: Jakmile tedy máme v ruce skalární součin, vždy se pomocí něj dá definovat norma. Naopak to ale neplatí. Obecněji je normou jakékoliv zobrazení, splňující 3 podmínky, jež jsme si na okraj uvedli výše u normovaného lineárního prostoru. Nicméně ne každá taková norma souvisí se skalárním součinem. Například $\|x\| := \max\limits_{x_i} x$ je norma, ale žádný skalární součin s ní nesouvisí.

- Vektory x, y nazveme **ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu** $(.,.)$, jestliže $(x,y) = 0$. Množinu $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ nazveme ortogonální, jestliže jsou její každé dva prvky navzájem ortogonální. Pokud navíc platí $\forall i \in \{1, \ldots n\} : \|e_i\| = 1$, nazveme takovou množinu **ortonormální**.

Pro „klasické" vektory a „klasický" skalární součin není ortogonalita nic jiného, než kolmost. Člověka by mohlo napadnout, proč bychom mohli chtít ortogonalitu vůči čemukoliv jinému, než klasickému skalárnímu součinu. Vzpomínáte si ještě na příklad s přibližováním polynomem, když jsme si povídali o bázích? Ta „nepěkná" báze, která nám ale v podstatě dala řešení problému zadarmo, byla ortonormální množina vzhledem ke skalárnímu součinu $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Obecně je dobré mít ortonormální bázi, neboť v tu chvíli vyjádříme v jejích souřadnicích jakýkoliv prvek velmi jednoduše:

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

přenásobíme skálárně s libovolným prvkem e_i:

$$(x, e_i) = (\alpha_1 e_1, e_i) + \ldots (\alpha_i e_i, e_i) + \ldots (\alpha_n e_n, e_i),$$

[27] Stejně jako u 3-rozměrných vektorů je výsledkem vektorového součinu vektor, podobně máme tenzorový součin atd.

$$(x, e_i) = \alpha_1 \underbrace{(e_1, e_i)}_{=0} + \dots \alpha_i \underbrace{(e_i, e_i)}_{=1} + \dots \alpha_n \underbrace{(e_n, e_i)}_{=0} = \alpha_i,$$

takže vidíme, že s ortogonální bází souřadnici α_i získáme skalárním vynásobením s příslušným prvkem e_i, nemusíme řešit (často velmi nepěknou) soustavu rovnic.

- Fajn, asi je dobré mít ortonormální bázi $e_1, \dots, e_n$, ale kde vzít a nekrást? Na to dává odpověď **Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces**:

   1. Máme (lineárně nezávislou) množinu vektorů $f_1, \dots, f_n$ a zadaný skalární součin $(.,.)$. [28]

   2. Vektor e_1 získáme jednoduše **normováním** f_1, tzn.
   $$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}.$$

   3. Obecně k-tý vektor ortogonalizujeme, tj. of f_k odečítáme násobky $e_1, \dots, e_{k-1}$ tak, aby výsledek byl k vektorům $e_1, \dots, e_{k-1}$ ortogonální. Tyto násobky jsou dané skalárními součiny (viz vlastnost $(x, y) = \|x\| \, \|y\| \cos \alpha$):
   $$\tilde{e}_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} (f_k, e_j) e_j.$$

   4. Normujeme k-tý ortogonalizovaný vektor, tj.
   $$e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}$$
   a pokračujeme ke $(k+1)$-nímu vektoru.

- **Př.:** Pomocí Gramova-Schmidtova procesu ortonormalizujme vektory
$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
vzhledem ke skalárnímu součinu
$$(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2.$$
Na začátku je dobré si napsat také, jak vzhledem k danému skalárnímu součinu vypadá norma. To ať člověk nezazmatkuje a nepočítá s „klasickou“ normou:
$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{3x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2}.$$

[28] A příslušnou normu $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Dále normujeme první vektor:

$$\|f_1\| = \sqrt{3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2} = \sqrt{3}$$

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Druhý vektor dostaneme ortogonalizací a následným normováním:

$$\tilde{e}_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 0) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \frac{\frac{1}{3}\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]}{\|\frac{1}{3}\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]\|} = \frac{\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]}{\|\left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]\|} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) \cdot 3 + 6 \cdot 3^2}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{42}}{42} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

Že jsou naše vektory ortonormální si můžeme lehce ověřit:

$$(e_1, e_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3}(3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1,$$

$$(e_2, e_2) = \left(\frac{\sqrt{42}}{42} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{42}}{42} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{42}(3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) \cdot 3 + 6 \cdot 3^2) = \frac{1}{42} \cdot 42 = 1,$$

$$(e_1, e_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{42}}{42} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \frac{\sqrt{14}}{42}(3 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) + 6 \cdot 0 \cdot 3) = \frac{\sqrt{14}}{42} \cdot 0 = 0.$$

A Několik příkladů k procvičení

V této příloze naleznete několik málo příkladů i s řešeními. Příklady, které jsou spíše pro zamyšlení nebo patří k těžším a měly by prověřit Vaše porozumění látce, jsou označeny symbolem $\ast$. Takovéto příklady se nicméně na testu mohou objevit spíše v podobě bonusového příkladu, než jako „klasické zadání“, mohou Vám také pomoci u ústní zkoušky (platí pro obor VAM).

A.1 Zadání

1. Určete Re z^m a Im z^m, je-li:

   (a) $z = 1 + i,\ m = 6$

   (b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ m = 5$

   (c) $z = -\frac{\sqrt{2}}{1+i},\ m = 16$

   (d) $z = \frac{3\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}-i},\ m = 9$

   (e) $z = -16,\ m = \frac{1}{4}$

   (f) $z = (6 + 4i)(3 - 2i) + 1,\ m = \frac{1}{3}$

2. $\ast$ Pokuste se pomocí základních znalostí komplexních čísel (exp. tvar, Moivreova věta apod.) dokázat následující trigonometrické identity:

   (a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

   (b) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

   (c) $\sin(5\alpha) = 5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha$

3. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 11 & 13 & -9 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Spočítejte

   (a) $\mathbf{x} + \mathbf{y};\ \mathbf{x}^T\mathbf{y}$

   (b) $\mathbf{A} + \mathbf{C}^T$

   (c) $\mathbf{CB}$

   (d) $\mathbf{CA}$

   (e) $\mathbf{BC}^T$

   (f) $\mathbf{BA} + \mathbf{B}^2\mathbf{A}$

   (g) $(\mathbf{B} + 3\mathbf{I})\mathbf{x}$

   (h) $(\mathbf{Cy})^T\mathbf{C}$

   (i) $\mathbf{xy}^T$

4. Řešte následující soustavy rovnic:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 7 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \end{array}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 10x_3 &= 16 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_4 &= 12 \\ x_1 + 13x_2 + 13x_3 + 7x_4 &= 10 \end{aligned}$$

5. $\ast$ Nechť $f(x) = ax^2 + b\cos(\pi x) + c\log_2(x)$. Určete koeficienty a, b, c tak, aby platilo

$$f(1) = -1, \; f(2) = 5, \; f(4) = 16.$$

6. $\ast$ (*Příklad je v zásadě jednoduchý, ale vzhledem k tomu, že lidi nemají rádi slovní úlohy...*) Krámek „U Šílené mandarinky“ prodává čtyři typy zboží: Pivo, lenochody, hodinky s vodotryskem a zpívající rajčata. Dnes do krámku zavítali tři zákazníci:

   - První si za 80 zlatých pořídil jedno pivo, jednoho lenochoda a 4 zpívající rajčata.
   - Druhý dal stejnou sumu za dvě piva a jedny hodinky s vodotryskem.
   - Třetí zákazník byl bohatý, a tak za 230 zlatých pořídil 2 lenochody, 2 hodinky s vodotryskem a 2 rajčata.
   - Po chvíli se však třetí zákazník vrací znechucen, jedny hodinky které si před chvílí koupil nefungují, a tak je přišel vrátit. Za peníze zpět si místo nich pořídil 5 piv na žal, a k tomu 2 rajčata.

   Otázka je prostá: Kolik která věc v krámku stála?

7. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 6 & 10 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

   Nejděte neznámou matici $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3,3}$, jestliže:

   (a) $\mathbf{BX} = \mathbf{I}$

(b) $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$

(c) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

(d) $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{AX} = \mathbf{C}$

(e) $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{XA}^{-1}\mathbf{B} = 2\mathbf{I}$

8. Bod $\left[-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right]^T$ se necítí ve své kůži. Vůbec se mu totiž nelíbí, že byl úplně jiným bodem, jenže pak někdo přišel, zarotoval ho o úhel $\frac{\pi}{2}$ kolem osy x, poté pro změnu o úhel π kolem osy y, a nakonec jej dvakrát přiblížil k počátku souřadného systému. Náš bod se teď snaží vymyslet medicínu v podobě matice, kterou když se vynásobí, dostane se zpět.

   (a) Jakým bodem vlastně původně byl?

   (b) * Jaká matice jej dostane zpět?

9. *Dokažte, že v libovolném vektorovém prostoru X platí:

   (a) $(\exists! o \in X)(\forall x \in X): \quad x + o = o + x = x,$

   (b) $(\forall x \in X)(\exists!(-x) \in X): \quad -x + x = x + (-x) = o,$

   (c) $\forall x \in X: \quad 0 \cdot x = o,$

   (d) $\forall x \in X: \quad (-1) \cdot x = -x,$

   (e) $\forall x, y, z \in X: \quad x + y = x + z \quad \Rightarrow \quad y = z.$

10. *Ověřte, zda jsou následující struktury vektorovými prostory:

   (a) $(\langle 0, 2), \oplus, \odot)$, kde $x \oplus y = (x + y)$ mod 2, $\quad \alpha \odot x = (\alpha x)$ mod 2.

   (b) $(\mathbb{R}^+, \cdot, \uparrow)$, kde $\alpha \uparrow x \ = \ x^\alpha$.

11. Ověřte, zda U je podprostorem V, jestliže

   (a) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: \ x + y + z = 0\right\}$

   (b) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: \ z = 1\right\}$

   (c) $V = C(\mathbb{R})$[29], $\quad U = P_3 = \left\{f \in C(\mathbb{R}): \ f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$

   (d) $V = P_3, \quad U = \left\{ax^2 + bx + c: \quad 3a + 5b - c = 0\right\}$

   (e) $V = \mathbb{C}, \quad U = \{z \in \mathbb{C}: \quad \text{Re } z = \text{Im } z\}$

   (f) $V = \mathbb{C}, \quad U = \{z \in \mathbb{C}: \quad \text{Re } z > 0 \ \wedge \text{Im } z < 0\}$

12. Ověřte lineární závislost či nezávislost následujících množin:

[29] Tedy všechny funkce jedné proměnné, spojité na celém $\mathbb{R}$.

(a)

$$u = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(c)

$$f(x) = x^2 - 3, \;\; g(x) = x - x^2, \;\; h(x) = 6 - 2x$$

(d)

$$p(x) = x^3 - 1, \quad q(x) = x^2 + 2x + 1,$$

$$r(x) = x^2 + x, \quad s(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$$

(e)

$$\varphi_1(x) = 1, \;\; \varphi_2(x) = 2^x, \;\; \varphi_3(x) = 3^x, \;\; \varphi_4(x) = 4^x$$

13. Ukažte, že pro libovolné přirozené $n > 2$ je matice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$$

singulární.

14. Najděte souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, jestliže:

(a)

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{e}_1(t) = 1, \;\; \mathbf{e}_2(t) = t, \;\; \mathbf{e}_3(t) = t^2, \;\;\; \mathbf{x}(t) = 2t^2 - 4t + 7$$

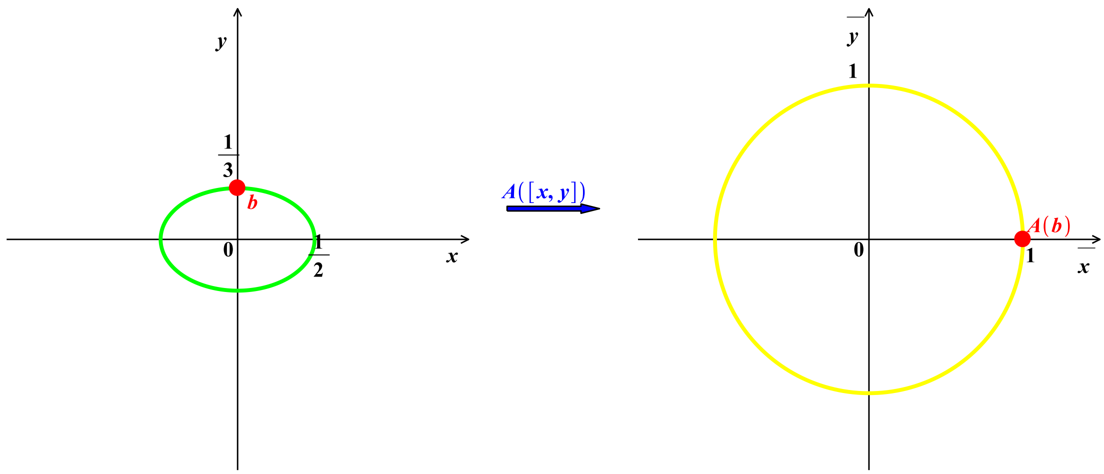
(d)

$$\mathbf{e}_1(t) = t^2, \;\; \mathbf{e}_2(t) = t + 1, \;\; \mathbf{e}_3(t) = t - 1, \;\;\; \mathbf{x}(t) = t^2 + 2t + 8$$

(e) $\ast$

$$\mathbf{e}_1(t) = 1,\ \mathbf{e}_2(t) = \cos t,\ \mathbf{e}_3(t) = \cos 2t,\quad \mathbf{x}(t) = 2\cdot(\cos t + 1)^2$$

15. $\ast$Nalezněte lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které zobrazí elipsu s poloosami $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ a „počátečním bodem na 12ti hodinách“ na jednotkovou kružnici s „počátečním bodem na 3 hodinách“, viz Obrázek 9.



Obrázek 9: Ilustrace úlohy 12

16. Nalezněte $A(\mathbf{x}), \mathbf{y}, \mathcal{N}(A), \mathcal{H}(A)$, je-li dáno:

(a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A([1,1]) &= [3,7]\,, & \mathbf{x} &= [2,-1]\,,\\ A([-1,0]) &= [-1,3]\,, & A(\mathbf{y}) &= [2,4] \end{aligned}$$

(b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} A([1,1,0]) &= [0,1,1]\,, & \mathbf{x} &= [3,2,3]\,,\\ A([0,1,1]) &= [-1,1,0]\,, & A(\mathbf{y}) &= [0,-1,-1]\\ A([1,0,1]) &= [1,-2,-1]\,, \end{aligned}$$

(c) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A([1,1,0]) &= [3,1]\,, & \mathbf{x} &= [3,1,-4]\,,\\ A([0,1,1]) &= [5,-1]\,, & A(\mathbf{y}) &= [6,-14]\\ A([1,0,1]) &= [4,0]\,, \end{aligned}$$

(d) $A : P_3 \to P_2$

$$\begin{aligned} A(t^2+1) &= 2t, & \mathbf{x}(t) &= 3t^2+7t+2,\\ A(t+2) &= 1, & A(\mathbf{y}(t)) &= 4t+1\\ A(2t-1) &= 2, \end{aligned}$$

17. Určete $\mathbb{B}_E, \mathbb{B}_{S_E}, \mathbb{B}_{A_E}, C$, je-li dáno:

(a) $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + x_2y_1,\\ E &= \{[1,0]\,,[0,1]\}\,,\\ C &= B([3,1]\,,[2,4]) \end{aligned}$$

(b) $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_1y_3 - x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_3,\\ E &= \{[1,0,0]\,,[0,1,0]\,,[0,0,1]\}\,,\\ C &= B([0,2,-1]\,,[1,1,1]) \end{aligned}$$

(c) $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 4x_1y_1 + 6x_1y_3 - x_2y_2 - 2x_3y_3,\\ E &= \{[2,-1,0]\,,[-1,2,-1]\,,[0,-1,2]\}\,,\\ C &= B([2,-2,2]\,,[0,0,4]) \end{aligned}$$

(d) $*B : P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B(f,g) &= \int\limits_0^1 -f(x)g(x)\ln x\mathrm{d}x,\\ E &= \left\{x^2, x, 1\right\}\,,\\ C &= \int\limits_0^1 -x(x-5)(25x^2+x+5)\ln x\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Bonus/pomůcka: Pokuste se dokázat/využijte, že $\forall n \in \mathbb{N} : \int\limits_0^1 -x^{n-1}\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$.

18. Spočítejte determinanty následujících matic:

(a)
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) (pozor na násobek před maticí!)
$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2\sqrt{3} \\ -\sqrt{6} & 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(d)
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(e)
$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(f)
$$\begin{bmatrix} 11 & 0 & -11 & 0 \\ 6 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

19. *Dokažte následující tvrzení o determinantech:

(a) $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$,

(b) je-li $\mathbf{A}$ ortogonální, tzn. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$, pak $\det \mathbf{A} = 1$.

20. Spočítejte vlastní čísla a vektory matice $\mathbf{A}$, jestliže:

(a)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(d) *

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 3 \\ 8 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

21. (a) *Ukažte, že pro pevně zvolené x, y a libovolné $t \in \left\langle -\left|\frac{x-y}{2}\right|, \left|\frac{x-y}{2}\right|\right\rangle$ mají matice[30]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -xy \\ 1 & x+y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & t \\ t & b_{22} \end{bmatrix},$$

kde

$$b_{11} = \frac{x^2 - xb_{22} - t^2}{x - b_{22}}, \quad b_{22} = \frac{1}{2}\left(x + y \pm \sqrt{(x-y)^2 - 4t^2}\right)$$

stejná vlastní čísla, a to x a y (matice jsou si tedy podobné).

(b) Nalezněte symetrickou matici $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ takovou, aby její mimodiagonální prvek byl roven 9 a platilo $\sigma(B) = \{24, 42\}$.

22. *Mějme prostor X se skalárním součinem $(.,.)$. Ukažte, že norma, indukovaná skalárním součinem, tzn. $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, splňuje rovnoběžníkové pravidlo:

$$\forall x, y \in X: \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

23. *Dokažte, že následující zobrazení jsou v prostoru X skalárním součinem, je-li

(a) $X = \mathbb{C}, \quad (w, z) = w\bar{z},$

(b) $X = C(\langle 0, 1\rangle), \quad (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x,$

(c) $X = \mathbb{R}^{n,n}, \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}).$ [31]

24. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte ze zadaných vektorů ortonormální bázi vzhledem k příslušnému skalárnímu součinu:

(a)

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

(b)

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 6x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3$$

[30] Teoreticky to platí pro úplně libovolné t, nicméně pouze s uvedeným omezením dostaneme reálnou matici B.

[31] Tzv. *stopa* matice: $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$

(c)

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 - 10x_1y_2 - 10x_2y_1 + 8x_1y_3 + 8x_3y_1 + 26x_2y_2 - 20x_2y_3 - 20x_3y_2 + 17x_3y_3$$

A.2 Výsledky

1. Určete Re z^m a Im z^m, je-li:

   (a) Re $z^6 = 0$, Im $z^6 = -8$

   (b) Re $z^5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, Im $z^5 = -\frac{1}{2}$

   (c) Re $z^{16} = 1$, Im $z^{16} = 0$

   (d) Re $z^9 = -512$, Im $z^9 = 0$

   (e) $z_1 = 2, z_2 = 2i, z_3 = -2, z_4 = -2i$

   (f) $z_1 = 3, z_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

2. $\ast$ Pokuste se pomocí základních znalostí komplexních čísel (exp. tvar, Moivreova věta apod.) dokázat následující trigonometrické identity:

   (a) Napište si $\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)}$ v goniometrickém tvaru, a na druhé straně převeďte exponenciálu součtu na součin exponenciál, opět převeďte na goniometrický tvar a roznásobte, porovnáním reálných a imaginárních částí dostanete formuli jak pro cos, tak i pro sin.

   (b) Získáte vhodnou úpravou pomocí formulí pro sin a cos z předchozího bodu (spíš cvičení na úpravu výrazu, než komplexku)

   (c) Napište si $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5$. Na jedné straně užijte Moivreovu větu a na druhé závorku natvrdo umocněte na 5. Podobně jako v prvním bodě získáte porovnáním reálných a imaginárních částí formule pro $\sin(5\alpha)$ i $\cos(5\alpha)$ (lze užít obecně pro jakékoliv přirozené číslo, nejen 5).

3. (a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$; 1

   (b) $\begin{bmatrix} 7 & -9 & 2 \\ 12 & 13 & -6 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -6 & -12 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 11 & 13 & -9 \\ -42 & 18 & 0 \\ 47 & 33 & -27 \end{bmatrix}$

   (e) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -4 & 0 & -12 \end{bmatrix}$

   (f) $\begin{bmatrix} -30 & -58 & 36 \\ 132 & 156 & -108 \end{bmatrix}$

   (g) $\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (h) $\begin{bmatrix} 74, & 2 \end{bmatrix}$

   (i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

4.

(a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3t-6 \\ 7t-13 \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$

(d) Nemá řešení.

5. * $a = 1, b = 2, c = -1$

6. * Pivo stálo 10 zlatých, lenochod 50, hodinky 60 a rajče 5.

7. (a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -90 & -52 & -101 \\ 148 & 88 & 178 \\ 64 & 36 & 80 \end{bmatrix}$

8. (a) Byl bodem $[1, 1, 0]^T$.

(b) * Zpět jej dostane matice $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

9. *S využitím axiomů a „vhodným zápisem nul“, poslední body i s využitím předchozích.

10. *

   (a) Není.

   (b) Je.

11. (a) Ano.

   (b) Ne.

   (c) Ano.

   (d) Ano.

   (e) Ano.

   (f) Ne.

12. (a) Nezávislé.

   (b) Závislé.

   (c) Závislé.

   (d) Nezávislé.

   (e) Nezávislé.

13. Stačí si uvědomit, že všechny řádky jsou lineární kombinací prvního a posledního řádku (proto $n > 2$).

14. (a) $[\mathbf{x}]_E = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (b) $[\mathbf{x}]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (c) $[\mathbf{x}]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

   (d) $[\mathbf{x}]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

   (e) *$[\mathbf{x}]_E = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

15. *$A([x,y]) = [3y, -2x]$.

16. (a)

$$\begin{aligned} A([2,-1]) &= [0,2]\,, \\ \mathbf{y} &= [0,1]\,, \\ \mathcal{N}(A) &= \{[0,0]\}\,, \\ \mathcal{H}(A) &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} A([3,2,3]) &= [1,-2,-1]\,, \\ \mathbf{y} &= [2p-1, 2p-1, 2p]\,, \quad p\in\mathbb{R}, \\ \mathcal{N}(A) &= \langle [1,1,1] \rangle\,, \\ \mathcal{H}(A) &= \langle [1,0,1]\,, [0,1,1] \rangle \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} A([3,1,-4]) &= [-7,7]\,, \\ \mathbf{y} &= \left[\tfrac{p}{2}-8, -2-p, 6+\tfrac{p}{2}\right], \quad p\in\mathbb{R}, \\ \mathcal{N}(A) &= \langle [-1,2,-1] \rangle\,, \\ \mathcal{H}(A) &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

(d) [32]

$$\begin{aligned} A(3t^2+7t+2) &= 6t+7, \\ \mathbf{y}(t) &= 2t^2+t+(4-3p), \quad p\in\mathbb{R}, \\ \mathcal{N}(A) &= \langle -5 \rangle\,, \\ \mathcal{H}(A) &= P_2. \end{aligned}$$

17. (a)

$$\mathbb{B}_E = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_{S_E} = \mathbf{I}_2, \quad \mathbb{B}_{A_E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C=0$$

(b)

$$\mathbb{B}_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_{S_E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_{A_E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C=1$$

(c)

$$\mathbb{B}_E = \begin{bmatrix} 15 & -18 & 23 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 6 & -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_{S_E} = \begin{bmatrix} 15 & -12 & 11 \\ -12 & 4 & 0 \\ 11 & 0 & -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_{A_E} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 12 \\ 6 & 0 & -6 \\ -12 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad C=32$$

[32] Alternativně

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= 2t^2+t+p, \quad p\in\mathbb{R}, \\ \mathcal{N}(A) &= \langle 1 \rangle \end{aligned}$$

(d) *

$$\mathbb{B}_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & \frac{1}{16} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_{S_E} = \mathbb{B}_E, \quad \mathbb{B}_{A_E} = \mathbf{O}_3, \quad C = -13$$

18. Spočítejte determinanty následujících matic:

(a) -30

(b) 17

(c) 1

(d) 3

(e) 42

(f) -11

19. *V obou bodech je dobré mít na paměti $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.

(a) Např. užitím řádkových úprav (jak tyto mohou ovlivnit determinant?) na obě matice, využijte transpozice a trojúhelníkové matice.

(b) Využijte tvrzení z předchozího bodu.

20. (a)

$$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -2, \quad \mathbf{v}_1 = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = t\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(b)

$$\lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i, \quad \mathbf{v}_1 = t\begin{bmatrix} 4-2i \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = t\begin{bmatrix} 4+2i \\ 4 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(c)

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,, \quad \mathbf{v}_1 = t\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(d) *

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3, \quad \mathbf{v}_1 = t\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = t\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

21. (a) *Pro matici A se lze přesvědčit přímým ověřením, pro matici B to sice lze také, ale je lepší si ji naopak odvodit z požadavku na ni, tj. zapsat, jak obecně vypadá spektrum a na základě toho určit b_{11} a b_{22}.

    (b) Přímým dosazením x, y, t máme $B = \begin{bmatrix} 33 & 9 \\ 9 & 33 \end{bmatrix}$.

22. *Dosazením předpisu pomocí skalárního součinu a pak už jednoduše z jeho vlastností.

23. *Z definice skalárního součinu, u b) stačí využít vlastností Riemannova integrálu, u c) si uvědomit, co je diagonálním prvkem matice $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$.

24. (a)

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

    (b)

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

    (c)

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$