Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

Souhrn ze cvičení

Poznámka úvodem

Tento dokument vznikl jako doplnění podkladů ke cvičením z předmětu FKP IT pro akademický rok 2018/19. Rozhodně se NEJEDNÁ o plnohodnotný výukový text, a to především (ale nejen) s ohledem na některé pojmy v rámci teorie, které zde buď chybí, nebo jsou pojaty velice vágně. Tento text slouží především studentům jako základní přehled probrané látky, a eventuálně jako zdroj s trochu alternativním pohledem na některé pojmy. Dále slouží samotnému autorovi jako osnova ke cvičením. Hlavně teorii doporučuji nastudovat spíše ze skript prof. Bouchaly:
`http://mi21.vsb.cz/modul/funkce-komplexni-promenne`

Za cenné připomínky k překlepům a především faktickým nesrovnalostem patří neskonalý dík Ing. Marii Sadowské, Ph.D. A když už patří, slušelo by se jej provést, takže: Děkuji, Majko!

Text i nadále prochází menšími či většími průběžnými úpravami. V případě, že v textu sami narazíte na něco věcně špatného, málo srozumitelného, politicky nekorektního či z jiného důvodu problematického, dejte mi prosím vědět na e-mail `david.ulcak@vsb.cz`.

V Ostravě 20.9.2018 [1]

Téměř anonymní zvěř

[1] Zatím poslední úpravy proběhly 25. května 2022

Obsah

1 Komplexní čísla

- **Komplexní číslo** je číslo ve tvaru $a+bi$, kde $a,b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$. Množinu všech komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$.

- **Reálná a imaginární část**:
  Jestliže $z = a + bi$, tak $\mathrm{Re}\ z = a$, $\mathrm{Im}\ z = b$.

  Častá chyba: Spousta studentů napíše $\mathrm{Im}\ z = bi$. **To je ale špatně, i se sem nepíše!** Imaginární část říká „kolik tam toho imaginárního je“, jinak řečeno je to vždycky jen „to, co je u i“.

  Např.: $z = 1 + i\sqrt{3}$, tzn. $\mathrm{Re}\ z = 1$, $\mathrm{Im}\ z = \sqrt{3}$.

- Dvě komplexní čísla se rovnají právě tehdy, když se rovnají jejich reálné a imaginární části, tzn.
$$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i, \qquad z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad (a_1 = a_2 \ \wedge\ b_1 = b_2)\,.$$

- Sčítáme a odečítáme „po složkách“, násobíme klasicky roznásobením:
  $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i :$
  $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i, \quad z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$

- Základní mocniny i:
$$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1,$$
  a protože $i^4 = 1$, není těžké si rozmyslet, že pak už se to cyklicky opakuje (tzn., že např. $...i^{-1} = i^3 = i^7 = i^{11}...$, a podobně).

- **Číslo komplexně sdružené k z**:
  Značíme jej $\overline{z}$, definováno je následovně: Jestliže $z = a + bi$, pak $\overline{z} = a - bi$. Nenechme se zmást značením „plus a mínus“, komplexní sdružení jednoduše obrací znaménko u imaginární části. Zjevně platí:
  $\overline{\overline{z}} = z$
  $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.....**Tj. $z \cdot \overline{z}$ je vždy nezáporné reálné číslo!**

  Např.: $z = 1 + i\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = 1 - i\sqrt{3}, \qquad z \cdot \overline{z} = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4.$

  Je-li z kořenem nějakého polynomu (s reálnými koeficienty), je jeho kořenem i $\overline{z}$. Např.:
$$x^2 - 2x + 2 = 0 \ \ .... \ x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i,$$

$$x_1 = 1 + i,\ x_2 = 1 - i \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \overline{x_2}.$$

- Při *dělení* komplexních čísel se řídíme mottem „nechceme žádné i ve jmenovateli". Zbavíme se jej za použití rozšíření pomocí komplexně sdruženého jmenovatele, neboť už víme, že $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}_0^+$, a zlomek (podobně, jako když se zbavujeme odmocnin) vynásobíme „vhodně napsanou jedničkou":

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{(\mathrm{Re}\ z_2)^2 + (\mathrm{Im}\ z_2)^2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

  Např.:

$$\frac{2-4i}{1-i} = \frac{2-4i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(2-4i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{2-4i+2i-4(-1)}{2} = \frac{6-2i}{2} = \underline{\underline{3-i}}$$

  Občas je dobré si pamatovat, že speciálně $\frac{1}{i} = -i$.

- **Absolutní hodnota**:
  Udává „vzdálenost od 0" v Gaussově rovině - komplexní čísla lze v určitých směrech ztotožnit s dvourozměrnými vektory ($z = a + bi \sim [a, b]$), absolutní hodnota je tedy v podstatě velikost tohoto vektoru.

  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

  Pozn.: Už z toho, že absolutní hodnota udává „velikost" je jasné, že jde o **nezáporné reálné číslo!** Spoustě studentů po chybě z nepozornosti zůstane v absolutní hodnotě i a vůbec jim to není divné. Ale jak je velké něco, co měří třeba $4 + 2i$? Nevím jak Vy, ale já si to moc představit neumím.

- Absolutní hodnoty různých komplexních čísel můžeme porovnávat, takže z tohoto pohledu lze mluvit o tom, které z nich je „větší", tj. například výraz $|z_1| > |z_2|$ má smysl (samozřejmě totéž lze říct o $\geq, <, \leq$). Jak je to ale s komplexními čísly jako takovými? Dá se v nějakém smyslu psát $z_1 > z_2$?

  Jelikož $i \neq 0$, tak by nevyhnutelně muselo platit buď $i > 0$, nebo $i < 0$. V případě $i > 0$ by to znamenalo, že také $i^2 > 0$, jenže $i^2 = -1$, takže by muselo platit $-1 > 0$, což je samozřejmě nesmysl. Pokud by naopak bylo $i < 0$, dostali bychom opět $i^2 = -1 > 0$ (protože pokud $i < 0$, tak násobení nerovnosti číslem i otočí nerovnost). Pokud se Vám to zdá celé jakési podivné, máte pravdu: **Na komplexních číslech NELZE zavést uspořádání.** A to nejen klasické „větší/menší", ale žádná relace (úplného) uspořádání.

- **Argument komplexního čísla**:
  Úhel, který „vektor“ z svírá s kladnou částí reálné osy, přesněji řečeno množina všech úhlů, které této poloze odpovídají. Značíme $\operatorname{Arg} z$. Pro číslo 0 **není definován**.

  Hlavní hodnotu argumentu značíme $\arg z$ a rozumíme jím takový úhel, který je ze „základního“ intervalu $(-\pi, \pi\rangle$.

  Vypočítat $\arg z$ můžeme několika způsoby (svým způsobem počítáme úhel v pravoúhlém trojúhelníku, viz Obrázek 1):
  $a > 0 \quad \Rightarrow \quad \arg z = \arctan \frac{b}{a}$
  $a < 0,\ b > 0 \quad \Rightarrow \quad \arg z = \pi + \arctan \frac{b}{a}$
  $a, b < 0 \quad \Rightarrow \quad \arg z = \arctan \frac{b}{a} - \pi$

  Ty „tanečky“ s přičítáním a odečítáním π jsou v daných kvadrantech nezbytné zkrátka proto, že funkce arctan vrací jen hodnoty v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, což je ale přípustný argument pouze pro čísla s kladnou reálnou částí. Navíc má tento vzorec problém pro $a = 0$, což je sice případ, kdy je jasné, jaký je argument (opět, viz Obrázek 1), ale přesto je to něco, co by bylo třeba zohlednit např. při implementaci na počítači.

  Alternativně (a asi jednodušeji) také: $\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{a}{|z|}, & b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{|z|}, & b < 0. \end{cases}$

  Pozn.: Samozřejmě by to šlo i přes arcsin, ale opět bychom se, podobně jako u použití arctan, potýkali se třemi případy, u arccos jsou jen dva a liší se pouze znaménkem, a jelikož dělíme absolutní hodnotou, nemusíme se zde obávat ani dělení nulou jako u arctan[2]. Na druhou stranu, k použití vzorce s arccos je třeba spočítat absolutní hodnotu, pro arctan ne, záleží čistě na osobním pohledu, co je komu pro výpočet bližší.

  Další možností, jak spočítat argument „bez kliček“, je zkrátka vzít v potaz, že zároveň musí být splněno $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$ a $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$ a vyčíst výsledný úhel z jednotkové kružnice (viz pomůcka od Ing. Mrovce: `https://homel.vsb.cz/~ulc0011/uhly.pdf`).

  Množinu $\operatorname{Arg} z$ pak dostaneme jednoduše jako $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$. Argument je důležitý za určitých okolností, jako je např. mocnění obecným komplexním číslem, nicméně

[2]Protože zjevně $|z| = 0$ platí pouze pro $z = 0$ a jak jsme si řekli, pro 0 není argument definován.

v drtivé většině případů budeme operovat pouze s hlavní hodnotou argumentu.

Platí, že $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\quad \arg(z_1 z_2) \in \mathrm{Arg}\ z_1 \oplus \mathrm{Arg}\ z_2$.
Přímo psát $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ můžeme pouze pokud výsledek leží v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$, v opačném případě je třeba přičíst/odečíst příslušný násobek 2π.

- **Goniometrický a exponenciální tvar**:
  Zatím jsme si uvedli pouze **algebraický tvar**, tj. $z = a + bi$. Označme $\arg z = \varphi$. Pak můžeme psát

  $$z = |z|\,(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \qquad \text{(\textbf{goniometrický} tvar)}$$

  $$z = |z|\mathrm{e}^{i\varphi} \qquad \text{(\textbf{exponenciální} tvar)}$$

  Odtud mimo jiné plyne, že: $\quad \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = \mathrm{e}^{i\varphi}$.

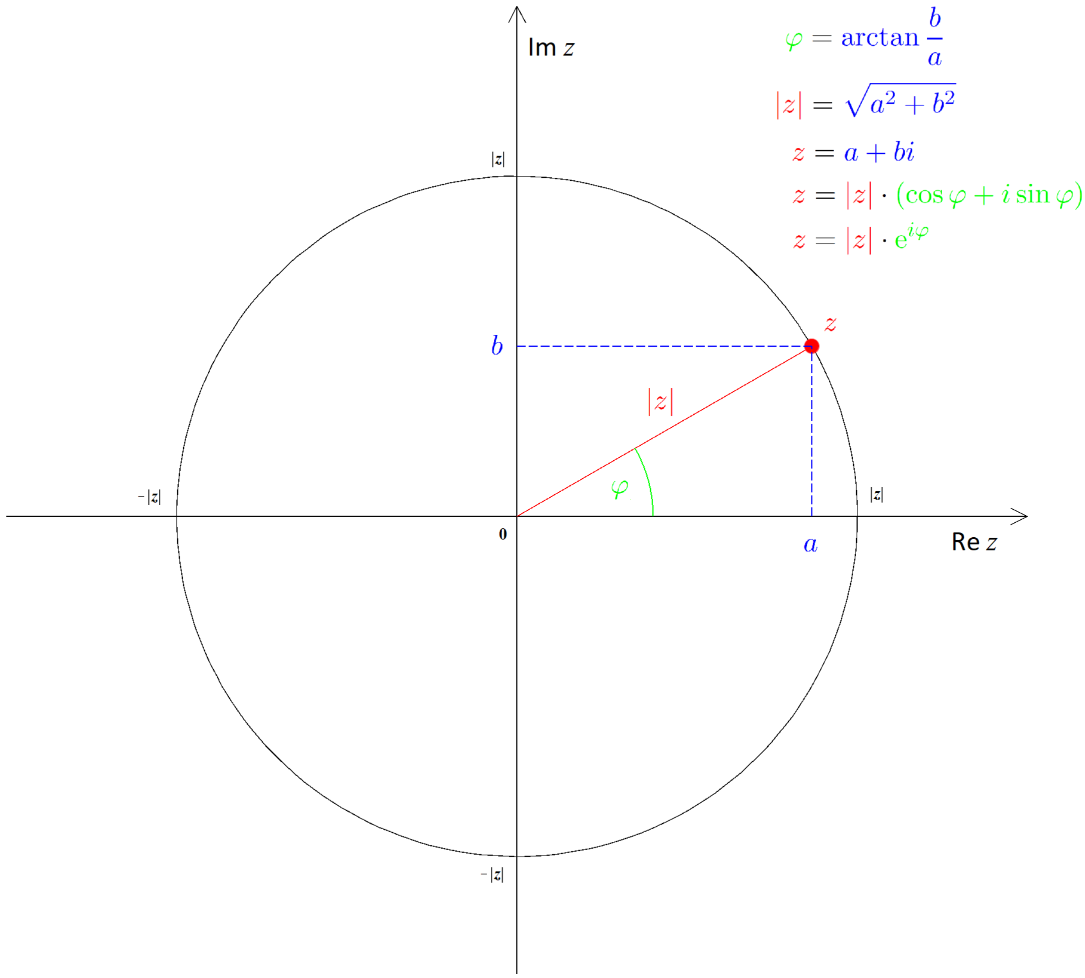
- Z exponenciálního tvaru lze okamžitě vidět zmíněné $\arg(z_1 z_2) \in \mathrm{Arg}\ z_1 \oplus \mathrm{Arg}\ z_2$:

  $$z_1 = |z_1|\mathrm{e}^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = |z_2|\mathrm{e}^{i\varphi_2}$$

  $$z_1 \cdot z_2 = \left(|z_1|\mathrm{e}^{i\varphi_1}\right) \cdot \left(|z_2|\mathrm{e}^{i\varphi_2}\right) = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

  Mimo jiné to znamená, že pokud máme číslo w, pro které platí $|w| = 1$, $\arg w = \varphi$, tak násobení číslem w není v Gaussově rovině nic jiného, než rotace o úhel φ kolem počátku.

  Pozn.: Goniometrický tvar se ještě dá lehce vymyslet v rámci ilustrace pravoúhlým trojúhelníkem, ale kde se proboha vzalo nějaké „é na í“? Jak si to představit? Inu, komplexní funkce ještě zavedeny nemáme. Nicméně, už víme, jak se chovají celočíselné mocniny i, čili umíme i dosadit do polynomu, případně do nekonečné mocninné řady. Taylorovy řady si později zavedeme i v rámci komplexních čísel a právě přes ně se dá ukázat, že $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = \mathrm{e}^{i\varphi}$, viz samostatná část o Taylorových řadách.



Obrázek 1: Ilustrace v Gaussově rovině

Pozn.: Je dobré si uvědomit, že argument lze často vyčíst z obrázku. Např. i leží na horní části imaginární osy, je jasné, že úhel je $\frac{\pi}{2}$. Kladná reálná čísla mají zjevně argument nulový, atd.

- **Moivreova věta:**

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \varphi \in \mathbb{R}): \quad (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

  Toto tvrzení je zřejmé, máme-li k dispozici exponenciální tvar, bez něj se dá dokázat například matematickou indukcí.

- *Umocňování a odmocňování komplexních čísel* provádíme přes Moivreovu větu. Tzn. u mocnění je postup následovný:

  – Najdeme $|z|$ a φ (tj. $\arg z$),

– Použijeme $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$[3],

– Výsledek, pokud možno, převedeme zpátky do algebraického tvaru.

Př.:

$$z = 1 + i, \qquad z^8 = ?$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \varphi = \arctan \frac{1}{1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^4 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16 (\cos 0 + i \sin 0) = 16(1 + 0i) = \underline{\underline{16}}$$

- U n-té odmocniny postupujeme analogicky, s drobnou odlišností:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Jinak řečeno, dostaneme obecně n různých řešení. To je dáno tím, že při mocnění násobíme úhly, tady úhel dělíme. A protože se svým způsobem motáme po kružnici, nestačí nám jen jedno řešení, abychom pokryli všechny možnosti. [4] K jasnějšímu pochopení nám může pomoci jednoduchá úvaha:

Představme si, že jsme na jednotkové kružnici v poloze, odpovídající úhlu 0 a někdo nám řekne „**Ztrojnásobte svůj úhel!**“ - v tu chvíli není moc co řešit, pořád budeme mít nulový úhel. Tato situace odpovídá umocnění na třetí. Ale co když někdo přijde a řekne „Posuňte se na úhel, **jehož ztrojnásobením se dostanete na svou současnou pozici!**“, což je situace odpovídající třetí odmocnině? Samozřejmě, opět můžeme zůstat stát na 0. Ale co takový úhel $\frac{2\pi}{3}$? Ten když ztrojnásobíme, dostaneme se na 2π, což je ale ta samá pozice jako 0. A takto lze uvažovat pro jakýkoliv úhel a jakýkoliv násobek.

Obecně pro argumenty všech řešení odmocniny platí

$$\arg z = \varphi, \quad \sqrt[n]{z} = \{z_0, \dots, z_{n-1}\} \qquad \Rightarrow \qquad \arg z_0 = \frac{\varphi}{n},$$

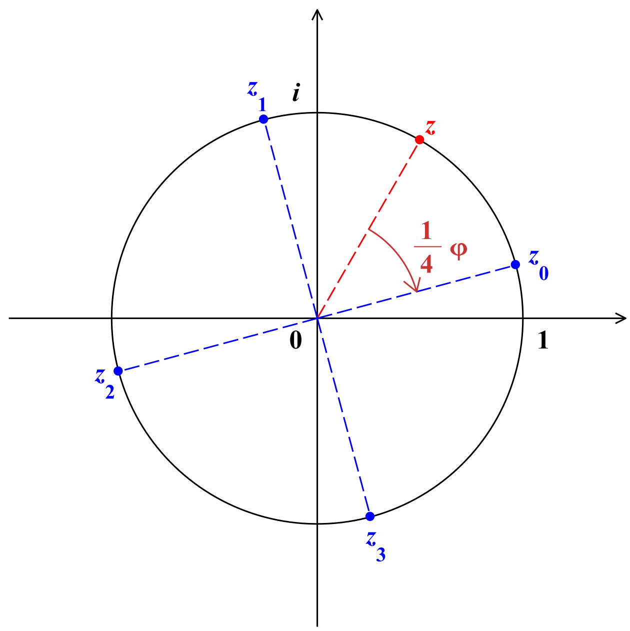
$$|\arg z_0 - \arg z_1| = |\arg z_1 - \arg z_2| = \dots = |\arg z_{n-2} - \arg z_{n-1}| = \frac{2\pi}{n},$$

jinak řečeno, odmocniny mají své argumenty **rovnoměrně rozmístěné**, což se dá znázornit pomocí jednotkové kružnice:[5]

[3] A nezapomínejme, že $\forall k \in \mathbb{Z}: \sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2k\pi)$, totéž pro cosinus.

[4] Ostatně už u reálných čísel platí např. $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$, a ne jen 2.

[5] Absolutní hodnotu 1 chceme čistě pro větší přehlednost, aby z leželo na stejné kružnici jako jeho odmocniny.



Obrázek 2: Situace s odmocňováním pro $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad n = 4$

Př.: Spočítejme $\sqrt[4]{1}$:

$$|1| = 1, \qquad \arg 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{0 + 2k\pi}{4}\right), \qquad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

$$\begin{aligned}
k = 0: &\quad \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\tfrac{0+0}{4} + i \sin\tfrac{0+0}{4}\right) = 1 \cdot (1 + i \cdot 0) = 1,\\
k = 1: &\quad \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\tfrac{0+2\pi}{4} + i \sin\tfrac{0+2\pi}{4}\right) = 1 \cdot \left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i \sin\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot (0 + i \cdot 1) = i,\\
k = 2: &\quad \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\tfrac{0+4\pi}{4} + i \sin\tfrac{0+4\pi}{4}\right) = 1 \cdot (\cos\pi + i \sin\pi) = 1 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -1,\\
k = 3: &\quad \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\tfrac{0+6\pi}{4} + i \sin\tfrac{0+6\pi}{4}\right) = 1 \cdot \left(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i \sin\tfrac{3\pi}{2}\right) = 1 \cdot (0 + i \cdot (-1)) = -i,
\end{aligned}$$

Takže $\underline{\underline{\sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\}}}$.

- Ačkoliv nám Moivreova věta značně ulehčuje život, komplexní mocniny a často i odmocniny se dají počítat také algebraicky. U mocnění však řešíme zjevný problém: Komu by se dle binomického vzorce chtělo například umocňovat závorku $(1 + i)^{12}$ a pak ještě výraz upravovat? To by byla docela šichta už s nevinným umocněním, zatímco s pomocí Moivreovy věty trénované oko uhodne prakticky z hlavy, že výsledek je -64. S odmocňováním je situace ještě záludnější:

Př.: Algebraicky spočítejme $\sqrt[3]{i}$.

Úlohu můžeme převykládat tak, že hledáme všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž platí $z^3 = i$. Nyní využijeme toho, že komplexní čísla se rovnají, právě když se rovnají jejich reálné a imaginární části:

$$\begin{aligned} z^3 &= i \\ (a+bi)^3 &= i \\ a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 &= i \\ {\color{red}a^3 - 3ab^2} + i\cdot\left({\color{blue}3a^2b - b^3}\right) &= {\color{red}0} + i\cdot{\color{blue}1} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} I. \quad a^3 - 3ab^2 &= 0 \\ II. \quad 3a^2b - b^3 &= 1 \end{aligned}$$

Nyní, když si vezmeme na paškál první rovnici, vidíme, že $a(a^2 - 3b^2) = 0$. Tedy buď $a = 0$, nebo $a^2 = 3b^2$. Pokud uvážíme $a = 0$, dostáváme dosazením do druhé rovnice $-b^3 = 1$, odtud okamžitě $b = -1$, takže první řešení jsme nalezli: $z_1 = 0 + i\cdot(-1) = \underline{\underline{-i}}$. K nalezení zbylých dvou budeme pro změnu uvažovat $a^2 = 3b^2$:

$$\begin{aligned} 3a^2b - b^3 &= 1 \\ 3(3b^2)b - b^3 &= 1 \\ 8b^3 &= 1 \\ b &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$a^2 = 3b^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

takže zbylá dvě řešení jsou $\underline{\underline{z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}}$.

Jak vidíme, hledání bylo pracné, a to jsme měli velice zjednodušenou situaci tím, že jedna ze složek odmocňovaného čísla byla nulová a hledali jsme pouze třetí odmocninu. Vyšší odmocniny by zvlášť v kombinaci s nenulovými složkami odmocňovaného čísla algebraicky vůbec nemusely být řešitelné, přinejmenším analyticky ne. A jistě sami uznáte, že štvát numerické řešiče na takovou prkotinu, jako je odmocňování, je jako jít s bazukou na mravence.

2 Množiny a jejich znázornění v Gaussově rovině

- *Připomenutí*:
  $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1},\ \text{Re } z = x,\ \text{Im } z = y.$[6]
  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \overline{z} = x - yi,\ \arg z \overset{ozn.}{=} \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|}, & y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{|z|}, & y < 0 \end{cases}$

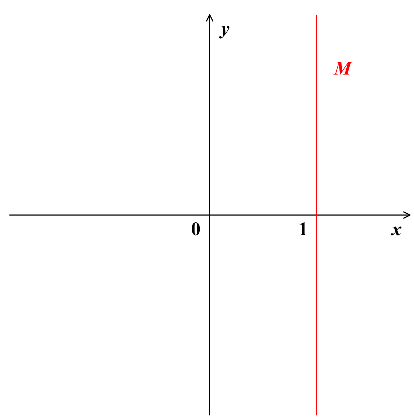
- **Množinu** komplexních čísel s danou vlastností „něco“ budeme zapisovat takto:
  $M = \{z \in \mathbb{C} :\ z$ splňuje „něco“$\}$.[7]

  Např. množinu M všech komplexních čísel, jejichž reálná část je rovna 1, můžeme zapsat

$$M = \{z \in \mathbb{C} :\ \text{Re } z = 1\}.$$

- *Zakreslení množiny v Gaussově rovině*:
  Nejprve si uvědomíme, že $z = x + yi$, a vlastnost, kterou jsou prvky množiny popsány, si interpretujeme právě pomocí x a y. V případě potřeby upravujeme, a (pokud není cvičící sadista) dostaneme výraz, jasně popisující „obraz“, jenž vznikne. Tento už pouze zakreslíme.

  Například vezmeme-li již uvedenou množinu $M = \{z \in \mathbb{C} :\ \text{Re } z = 1\}$, můžeme v tomto případě jednoduše psát $x = 1$. Tento výraz v rovině xy popisuje svislou přímku, procházející bodem 1 na ose x:

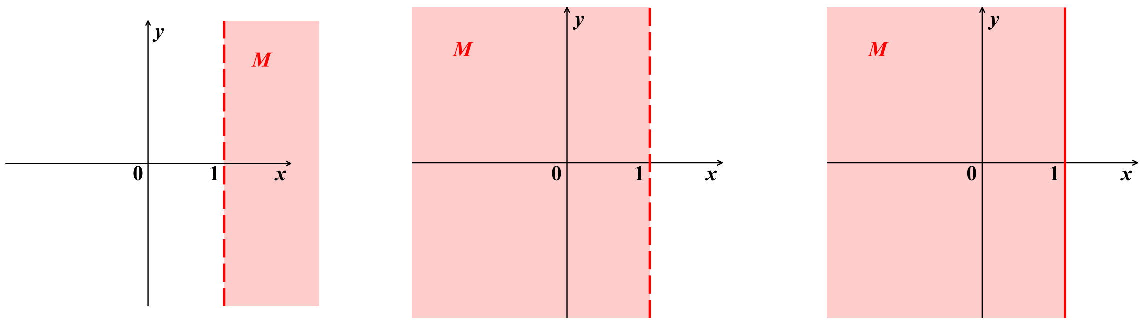


Obrázek 3: Obraz množiny M

[6] Minule jsme reálnou a imaginární část označovali a, b. To abychom lépe demonstrovali, že se jedná o čísla. Nicméně i do budoucna bude lépe užívat x, y, neboť budeme brzy reálnou a imaginární část chápat jako proměnné ve funkci.

[7] Nejčastěji množiny značíme M nebo Ω a prvky množiny z nebo w, nicméně jde pouze o označení, které může být libovolné.

Vidíme, že obrazem je pouze přímka. Obecně, bude-li podmínka dána **rovností**, obrazem bude **křivka** (buď analytickým předpisem, nebo jako křivka nějaké funkce $y = f(x)$). Bude-li dána **nerovností**, obrazem velice pravděpodobně bude **plocha**, jejíž hranici bude tvořit právě zmíněná křivka.[8] Bude-li tato nerovnost ostrá (tj. $<$ nebo $>$), hranice do množiny nepatří a vyznačíme ji čárkovaně:



(a) $M = \{z \in \mathbb{C} : \text{ Re } z > 1\}$ (b) $M = \{z \in \mathbb{C} : \text{ Re } z < 1\}$ (c) $M = \{z \in \mathbb{C} : \text{ Re } z \leq 1\}$

Obrázek 4: Obrazy množin podle typu podmínky (rovnost/nerovnost)

- $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$......... Analytický předpis **kružnice** se středem v bodě $[a,b]$ a poloměrem r v rovině xy.

  Z klasického analytického předpisu kružnice se však dá lehce odvodit elegantnější zápis pro kružnice v Gaussově rovině. Stále uvažujeme $z = x + yi$. Všimeme si, že pokud položíme $[a,b] = [0,0]$, tak při daném poloměru r platí

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$\underline{\underline{|z| = r}}$$

A nyní obecněji, vezmeme-li obecný střed $[a,b]$ a označíme si komplexní číslo $z_0 = a + bi$, zjistíme, že

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

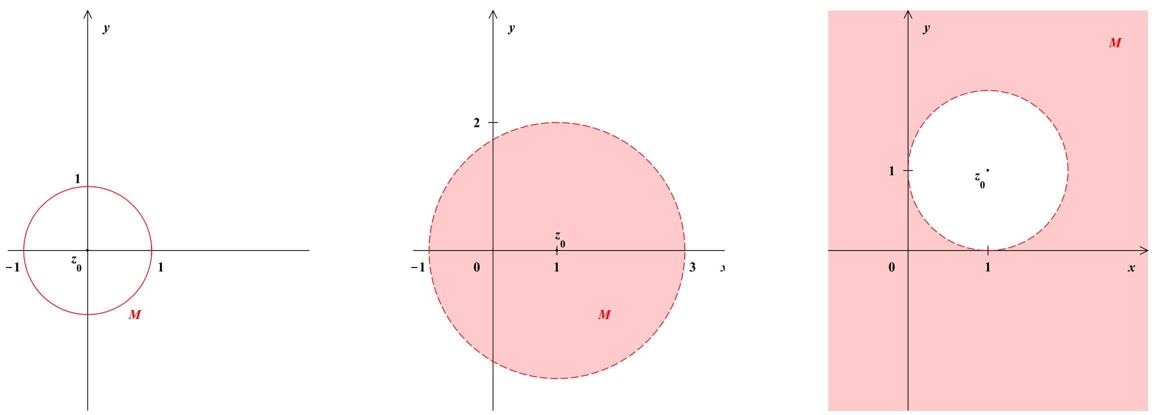
[8] V další části textu budeme křivky v Gaussově rovině zavádět formálně jakožto komplexní funkci reálné proměnné. V tuto chvíli prozatím berme pojem „křivka“ jen jako intuitivní představu.

$$|(x-a)+i(y-b)| = r$$

$$|z-(a+bi)| = r$$

$$\underline{\underline{|z-z_0| = r}}$$

Takže jsme lehce zjistili, že v Gaussově rovině lze kružnici se středem v bodě z_0 a poloměrem r zapsat jako množinu $M = \{z \in \mathbb{C}: \ |z-z_0| = r\}$.



(a) $M = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| = 1\}$ (b) $M = \{z \in \mathbb{C}: \ |z-1| < 2\}$ (c) $M = \{z \in \mathbb{C}: \ |z-(1+i)| > 1\}$

Obrázek 5: Obrazy množin s různými podmínkami, zahrnujícími kružnice

- Občas budeme potřebovat pojem **okolí bodu** z_0 o poloměru r. Nejedná se o nic jiného, než o **otevřený kruh** se středem v bodě z_0 a poloměrem r, množinově zapsáno $\{z \in \mathbb{C}: \ |z-z_0| < r\}$. Značíme $\mathcal{U}(z_0, r)$.

  Např.: Množina M na obrázku 5b není nic jiného, než $\mathcal{U}(1, 2)$.

- **Nekonečno:** V reálných číslech narážíme například při dělení nulou na problém, že máme „dvě“ nekonečna, kladné a záporné, záleží, kterým směrem se na reálné ose vydáme. V komplexní rovině by se zdálo, že máme „nekonečno nekonečen“, záleží, s jakým argumentem (tj. úhlem) se do nekonečna vydáme. Asi cítíme, že takto postavený koncept by byl uživatelsky docela bolestivý. V komplexním oboru je tudíž zavedeno **jediné nekonečno**. Je to zkrátka všechno to, co je „někde v dáli, pryč od počátku“.

  S ohledem na to platí: $\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad |\infty| = \infty, \quad \arg\infty$ není definován.

- **Okolí nekonečna:** $\mathcal{U}(\infty, r) = \left\{z \in \mathbb{C}: \ |z| > \frac{1}{r}\right\}$.

Proč takto? Řekli jsme si, že nekonečno je směrem „pryč od počátku“. Čím menší r, tím bližší okolí. Tedy čím bližší okolí nekonečna, tím dál od počátku bychom chtěli být. A když bude r hodně malé, $\frac{1}{r}$ bude zákonitě hodně velké, budeme tedy hodně daleko od 0 a „blízko“ nekonečnu.

- Pokud má pro prvky množiny platit současně více podmínek najednou, obrazem je **průnik** obrazů množin, v nichž by platily podmínky jednotlivě.

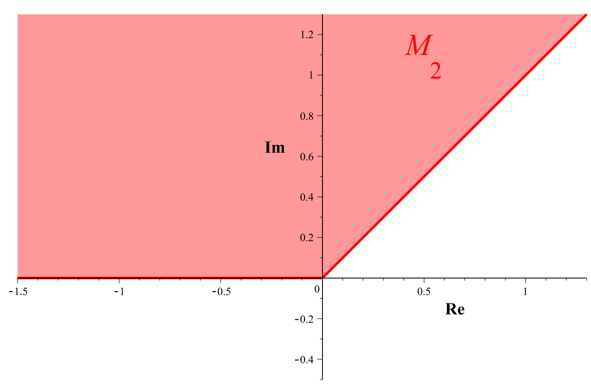
- Pokud má pro prvky platit alespoň jedna z většího výčtu podmínek, obrazem je **sjednocení** obrazů množin, v nichž by platily podmínky jednotlivě.

- Pokud máme prvky množiny **zobrazit** na jinou množinu pomocí nějaké funkce, pouze opět uvažujeme zápis pomocí x a y a bereme navíc v potaz omezení původní množiny.

- **Příklad:** Zakreslete množinu $M = \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z-2| = |1-2\overline{z}| \ \wedge \ \arg z \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \pi \right\rangle \right\}$.

Máme množinu danou dvěma podmínkami, které musí být splněny zároveň. Stačí tedy zjistit, jak by vypadaly pomocné množiny $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-2| = |1-2\overline{z}|\}$ a $M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \ \arg z \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \pi \right\rangle \right\}$, naše množina M bude jejich průnikem.

Situace s množinou M_2 je extrémně prostá, podmínka na argument nám říká, v jaké výseči se může hledané číslo pohybovat (na velikost nemáme žádná omezení):

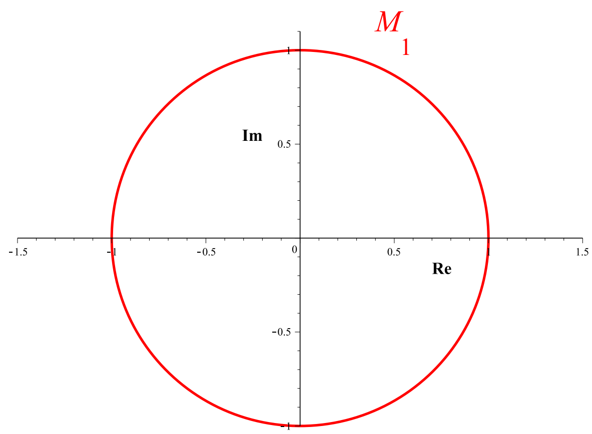


Obrázek 6: Množina M_2

Zato množina M_1 je o něco záludnější, zde bude třeba si situaci rozepsat pomocí x a y:

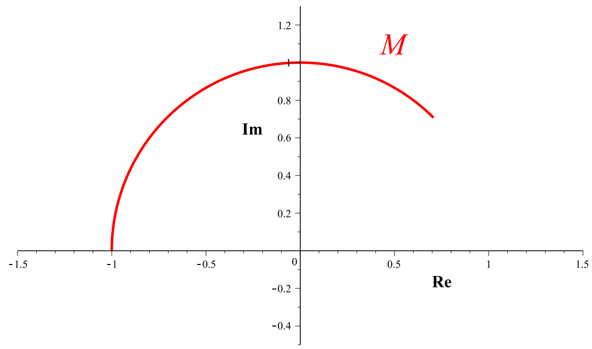
$$
\begin{aligned}
|z-2| &= |1-2\overline{z}| \\
|x+yi-2| &= |1-2(x-yi)| \\
|(x-2)+yi| &= |(1-2x)+2yi| \\
\sqrt{(x-2)^2+y^2} &= \sqrt{(1-2x)^2+4y^2} \\
x^2-4x+4+y^2 &= 1-4x+4x^2+4y^2 \\
3x^2+3y^2 &= 3 \\
\underbrace{x^2+y^2}_{=|z|} &= 1,
\end{aligned}
$$

což není nic jiného, než jednotková kružnice se středem v počátku:



Obrázek 7: Množina M_1

Výsledná množina M je, jak jsme již řekli, průnikem, čímž dostáváme její finální podobu:



Obrázek 8: Výsledná množina M

Pozn.: Při kreslení množin nemusíte nutně zavádět pomocné množiny, v tomto příkladě šlo čistě o názornost.

3 Komplexní funkce, křivky, reálná a imaginární část funkce

- *Označení*: $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
- **Komplexní funkcí** rozumíme zobrazení z
  - $\mathbb{C}_\infty$ (pak hovoříme o funkci komplexní proměnné),
  - případně z $\mathbb{R}$ (komplexní funkce reálné proměnné)

  do nějaké podmnožiny $2^{\mathbb{C}_\infty}$. Jinak řečeno, „nějakému“ číslu přiřazujeme jiné číslo, respektive obecně množinu čísel. Ano, na rozdíl od reálných funkcí, komplexní funkce **nemusí být jednoznačná**!

  Např. n-tá odmocnina má n výsledků, je tedy n-značná.
  Arg z = $\arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, a protože celých čísel je nekonečně mnoho, je funkce Arg z *nekonečněznačná*, apod.

- **Elementární komplexní funkce**:[9]
  - $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$
  - $\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}$, $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$
  - $\sinh z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$
  - $z \neq 0: \ \mathrm{Ln}\ z = \ln|z| + i \mathrm{Arg}\ z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}$
  - $z \neq 0: \ \ln z = \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + i\varphi$ [10]
  - $z_1^{z_2} = \mathrm{e}^{z_2 \cdot \mathrm{Ln}\ z_1}$

  Pozn.: e^z je $2\pi i$-periodická funkce, tzn. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z+2k\pi i}$, pro libovolné CELÉ číslo k. Z toho plyne, že pro celé z_2 stačí uvažovat $z_1^{z_2} = \mathrm{e}^{z_2 \cdot \ln z_1}$. Člověk si tím může ušetřit trochu práce, pokud pro celé z_2 počítá takto a ne přes Moivreovu větu. Samozřejmě počítáním s velkým logaritmem člověk nic nezkazí.

- **Pár příkladů:**
  - $\mathrm{e}^{1+\pi i} = \mathrm{e}^1(\cos\pi + i\sin\pi) = \mathrm{e}(-1 + 0i) = \underline{\underline{-\mathrm{e}}}$
  - $\cos i = \frac{\mathrm{e}^{i\cdot i} + \mathrm{e}^{-i \cdot i}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-(-1)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{1}}{2} = \underline{\underline{\cosh 1}}$
  - $\ln(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) = \underline{\underline{\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}}}$

[9] Připomeňme si, $z = x + yi$, Re $z = x$, Im $z = y$.

[10] Logaritmus na pravé straně už je klasický reálný logaritmus (dáváme do něj absolutní hodnotu, tj. kladné reálné číslo).

⋄

$$(1+i)^{-4} = e^{-4\ln(1+i)} = e^{-4\ln\sqrt{2}-i\pi} = e^{\ln\frac{1}{4}-i\pi} = e^{\ln\frac{1}{4}}(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)) = \frac{1}{4}(-1+0i) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

⋄ $i^i = e^{i\mathrm{Ln}\ i} = e^{i\cdot(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = \underline{\underline{e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}}}$ (Speciálně pro $k=0$: $e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,208$)

- Pro obecnou mocninnou funkci $z_1^{z_2}$ platí:
  - Pokud $z_2 \in \mathbb{Z}$, tj. z_2 je celé číslo, je obecná mocnina **jednoznačná**.
  - Pokud $z_2 \in \mathbb{Q}$, tj. z_2 je racionální číslo, tedy $z_2 = \frac{m}{n}$, kde m, n jsou celá a nesoudělná, je obecná mocnina n**-značná**.
  - Ve všech ostatních případech, tedy z_2 je iracionální (např. $\sqrt{2}, \pi, e$,...) nebo komplexní (obsahuje i), je obecná mocnina **nekonečněznačná**.

  Uvedené platí s ohledem na argument a $2\pi i$ periodicitu exponenciály.

- **Pozn.:** Připomeňme, že Moivreova věta platí pouze pro **celá**, eventuálně by se to přeneseně dalo vzít i pro racionální čísla. Proč o tom mluvím? Protože některým by mohlo připadat pohodlnější obecnou mocninu počítat jakousi variací na Moivreovu větu, než přes „nějaký další vzoreček“[11] a něco jako Moivreova věta se technicky vzato dá použít i pro iracionální a komplexní mocniny. **Důrazně však NEdoporučuji takto obecnou mocninu počítat!** Proč? Vezměme si příklad výše, i^i, a důvody si rozeberme:
  - Kdybychom tedy počítali „Pseudo-Moivreovou větou“, měli bychom
  $$i^i = |i|^i(\cos(i\arg i) + i\sin(i\arg i)) = 1^i\left(\cos\left(i\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right).$$
  - Hned máme první problém, 1^i **stejně musíme nějak spočítat.** A ne, opravdu to nemůžeme brát tak, že „jedna na cokoliv je jedna“! Ne, že by to nebyla pravda, ale v tomto případě je to jen jeden z nekonečně mnoha výsledků. Druhá možnost je nechat tam prostě 1^i, ale jaká je potom např. reálná nebo imaginární část výsledného čísla? Vy to v tom vidíte? Já ne.
  - Další problém: Musím nějak vyčíslit komplexní sin a cos. Buď bych si všiml, že $\cos\left(i\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ mohu napsat exponenciálně jako $e^{i\cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Jenže když už skáču k exponenciálnímu tvaru, tak výpočet přes goniometrický tvar tak trochu pozbývá smysl, proč jsem to vůbec dělal?
  - A pokud si toho nevšimnu, budu se patlat s postupným vyčíslováním komplexního sin a cos podle vzorečku. Stojí mi to za to?

[11] Pokud shovívavě opomeneme, že víceméně totožný vzoreček $a^b = e^{b\ln a}$ byste měli znát od prvního ročníku Bc studia, ne-li od prvního/druhého ročníku střední školy... :)

– Sečteno podtrženo: Nějaká obecnější variace na Moivreovu větu se sice použít dá i pro komplexní mocniny. Ale úplně nesmyslně a absurdně neúměrně si tím ztížím život, nehledě na to, že té obecné mocnině se při výpočtu stejně nevyhnu. A pokud vyhnu, tak to nevyhnutelně budu mít blbě.

Po přečtení uvedeného proto prosím vezměte na vědomí, že pokud budete obecnou mocninu navzdory varování počítat „Moivreovou větou“, úspěšně se dopustíte vydatného močení proti větru. A já budu při opravování pravděpodobně hartusit tak, že to budete mít na týdenní škytavku.

- **Definiční obor funkce** f: Množina všech čísel, která má smysl „sypat“ do funkce f. Značíme D_f.
  Např. pokud $f(z) = \ln z$, pak $D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tedy všechna komplexní čísla bez 0. Důvodem je, že pro 0 není definován argument.

- **Obor hodnot funkce** f: Množina všech čísel, která mohou být výstupem z funkce f. Značíme H_f, případně $\mathcal{R}(f)$.
  Např. pokud $f(z) = \mathrm{e}^z$, pak $H_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (nulu z exponenciály nelze dostat).
  Nebo, pokud $f(z) = \arg z$, pak $H_f = (-\pi, \pi\rangle$.

- Můžeme také narazit na *inverzní* problém, tzn. $f(z) = w$, kde w známe a máme určit z. V případě mocniny hledáme odmocninu a naopak, v případě exponenciály použijeme VELKÝ logaritmus a naopak, atd. Tak trochu kapitolou samou pro sebe jsou v tomto případě goniometrické a hyperbolické funkce, kde se využívá víceméně jednotný trik se substitucí a počítáním pomocné kvadratické rovnice, což si ukážeme např. pro $\sin z$, pro ostatní funkce je postup zcela analogický:

  Př.: Určete všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která platí $\sin z = -\frac{4}{3}i$.

  Nejprve si rozepíšeme $\sin z$ a upravíme:

$$\begin{aligned} \sin z &= -\tfrac{4}{3}i \\ \frac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i} &= -\tfrac{4}{3}i \\ \mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz} &= -\tfrac{4}{3}i \cdot 2i \end{aligned}$$

  Nyní celou rovnici přenásobíme e^{iz} a následně použijeme substituci $w = \mathrm{e}^{iz}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz} &= \tfrac{8}{3} \\ \mathrm{e}^{2iz} - 1 &= \tfrac{8}{3}\mathrm{e}^{iz} \\ w^2 - 1 &= \tfrac{8}{3}w \\ w^2 - \tfrac{8}{3}w - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Nyní stačí vyřešit tuto kvadratickou rovnici pro w, a jelikož jsme položili $w = \mathrm{e}^{iz}$, tak finální z dostaneme odtud jako $z = -i\mathrm{Ln}\ w$:

$$w^2 - \frac{8}{3}w - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad w_1 = 3,\ w_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 = -i\mathrm{Ln}\ 3 = -i\left(\ln 3 + 2k\pi i\right) = \underline{\underline{-i\ln 3 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}},$$

$$z_2 = -i\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = -i\left(\ln\frac{1}{3} + i\pi + 2k\pi i\right) = \underline{\underline{i\ln 3 + \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}}.$$

Pozn.: Samozřejmě se tímto „trikem“ dá nalézt obecný vzorec (můžete si zkusit):

$$\sin z = c \qquad \Rightarrow \qquad z = -i\mathrm{Ln}\ \left(ic \pm \sqrt{1-c^2}\right),$$

což se pro „klasický“ případ[12] $c \in \langle -1, 1\rangle$ podle očekávání zjednoduší na $\arcsin c$, eventuálně $\arccos \pm\sqrt{1-c^2}$.

- Funkce f je **spojitá** v bodě z_0, pokud se v něm rovná své limitě, tj.

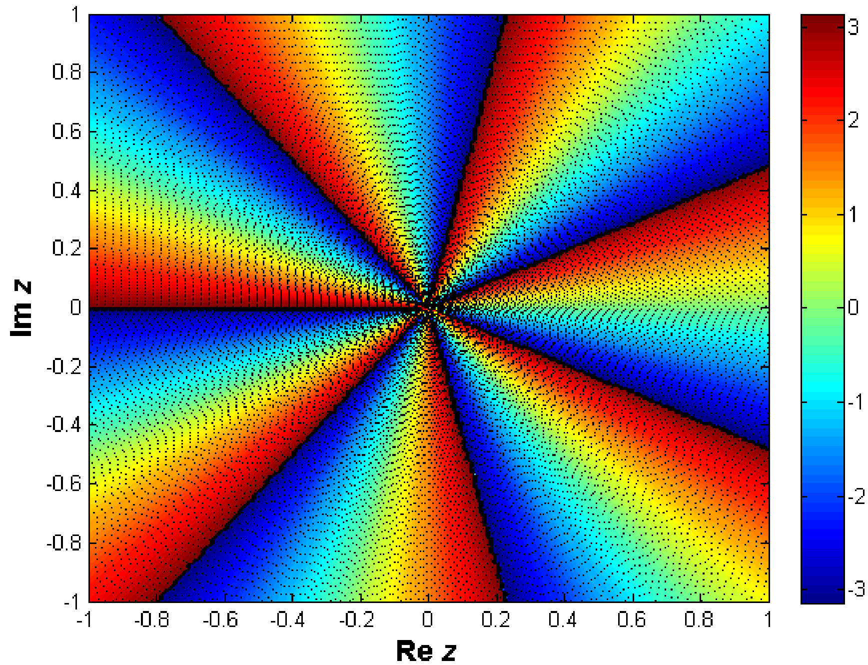
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Limity jsme si sice neuváděli, ale intuitivní představa je stejná jako u jednorozměrných reálných funkcí - když se blížíme k bodu z_0, tak se funkce f hodnotami přibližuje k $f(z_0)$ (tzn. neutíká tam do nekonečna, ani tam nemá skok). Dá se také říct, že funkce f je v bodě z_0 spojitá, pokud na nějakém **okolí** bodu z_0 na sebe hodnoty hezky „navazují“.

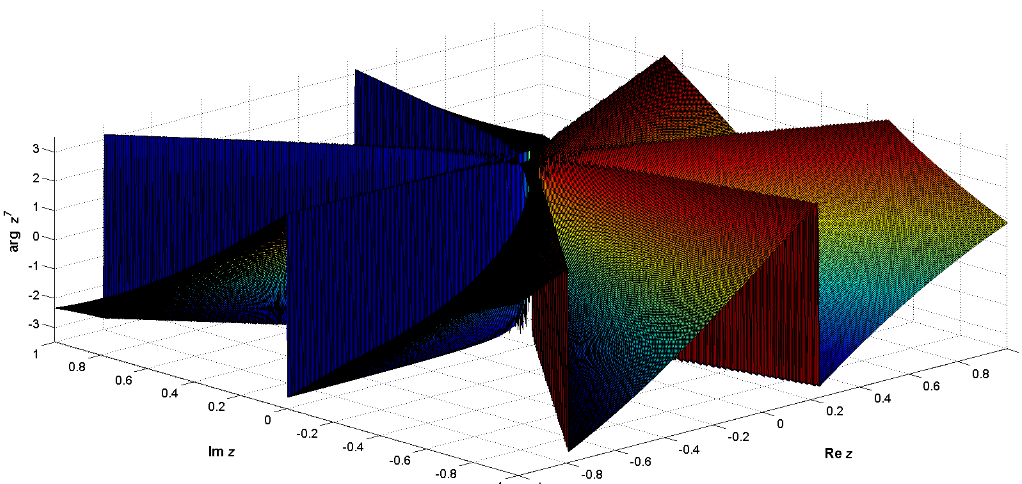
Např.: $f(z) = z^7$ je spojitá na celé množině $\mathbb{C}$, nikde nemá skoky, a v žádném konečném bodě neutíká do nekonečna.
$f(z) = \arg z$ není spojitá v žádném bodě na záporné části reálné osy, neboť tam má skok mezi π a $-\pi$.[13]
$f(z) = \arg z^7$ není spojitá na žádné polopřímce odpovídající $\arg z = \frac{(7-2k)\pi}{7}$, $k \in \{0, \dots, 6\}$, důvod je stejný jako v předchozím bodě.

[12] Pokud to náhodou někomu nedošlo, v reálném oboru je třeba $\sin x = 2$ holý nesmysl, v komplexním oboru už je to jiná písnička.

[13] Připomeňte si, že $\arg z \in (-\pi, \pi\rangle$ a nakreslete si obrázek.



Obrázek 9: „Heat mapa“ funkce $f(z) = \arg z^7$



Obrázek 10: Graf funkce $f(z) = \arg z^7$

Pozn.: Uvědomme si, že graf funkce $f(z) = \arg z^7$ jsme schopni nakreslit jen díky tomu, že $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (argument vrací jen čísla od $-\pi$ do π). Graf funkce z^7 bychom nedokázali nakreslit, neboť by šlo o funkci z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$, tedy její graf by v jistém smyslu byl 4rozměrný objekt. Pokud to někdo z Vás umí smysluplně nakreslit, máte u mne obdiv a drink. Proto, pokud chceme obecné komplexní funkce vizualizovat, musíme vizualizovat nějakou jejich „jednorozměrnou složku", jako je právě argument, dále třeba absolutní hodnota, reálná nebo imaginární část atd.

- **Křivky v** $\mathbb{C}$:
  Komplexní funkce reálné proměnné. Křivkou γ tedy rozumíme zobrazení $\gamma : I \to \mathbb{C}$, kde I je interval reálných čísel. Název křivka je poplatný zakreslení oboru hodnot v $\mathbb{C}$.

  Nejpodstatnější typ křivky - **kružnice** (ano, už zase):
  Graf křivky $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad \equiv \quad$ Obraz množiny, dané podmínkou $|z - z_0| = r$

  Pozn.: K lepšímu pochopení, jak zakreslit obecnější křivku opět pomůže si ji zapsat po složkách jako $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. Tyto složky udávají výsledné souřadnice v Gaussově rovině.

- **Oblast**: Otevřená, souvislá množina.
  - *otevřená* = s každým svým bodem obsahuje i nějaké jeho okolí, jinými slovy, neobsahuje vlastní hranici.
  - *souvislá* = každé 2 body v ní lze spojit křivkou, která v ní celá leží, tzn. je „z jednoho kusu".

- **Reálná a imaginární část funkce**
  Podobně jako samotná komplexní čísla mají reálnou a imaginární část, asi nikoho nepřekvapí, že pro komplexní funkce platí totéž. Jelikož však výsledek závisí na vstupu, reálná a imaginární část funkce nebudou pouze reálná čísla, ale obecně **reálné funkce** dvou proměnných. Princip je stejný, jako u kreslení množin, funkci zapíšeme místo z pomocí x a y, a funkci se snažíme vyjádřit ve tvaru $f(x + yi) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, přičemž $\mathrm{Re}\ f(z) = u(x, y)$ a $\mathrm{Im}\ f(z) = v(x, y)$.[14]

  Př.: Určeme reálnou a imaginární část funkce $f(z) = z^3$.

$$f(x + yi) = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2(yi) + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$$

$$= \underbrace{x^3 - 3xy^2}_{\mathrm{Re}\ f(z)} + i\underbrace{\left(3x^2y - y^3\right)}_{\mathrm{Im}\ f(z)} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3}}$$

[14] Opět, do imaginární části se NEPÍŠE i!

Př.: Určeme reálnou a imaginární část funkce $f(z) = |z|\overline{z}$.

$$f(x+yi) = \sqrt{x^2+y^2}\cdot(x-yi) = x\sqrt{x^2+y^2} - iy\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\underline{\underline{u(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = -y\sqrt{x^2+y^2}}}$$

Př.: Určeme reálnou a imaginární část funkce $f(z) = \mathrm{e}^z$.

$$f(x+yi) = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y) = \mathrm{e}^x\cos y + i\mathrm{e}^x\sin y$$

$$\underline{\underline{u(x,y) = \mathrm{e}^x\cos y, \quad v(x,y) = \mathrm{e}^x\sin y}}$$

Př.: Určeme reálnou a imaginární část funkce $f(z) = \sin z$. [15]

$$f(x+yi) = \frac{\mathrm{e}^{i(x+yi)} - \mathrm{e}^{-i(x+yi)}}{2i} = \frac{\mathrm{e}^{-y+ix} - \mathrm{e}^{y-ix}}{2i} = \frac{\mathrm{e}^{-y}(\cos x + i\sin x) - \mathrm{e}^{y}(\cos(-x) + i\sin(-x))}{2i}$$

$$= -\frac{i}{2}\left(\mathrm{e}^{-y}\cos x + i\mathrm{e}^{-y}\sin x - \mathrm{e}^{y}\cos x - i\mathrm{e}^{y}(-\sin x)\right) = -\frac{i}{2}\left((\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y})\cos x + i\,(\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y})\sin x\right)$$

$$= i\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2}\cos x + \frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2}\sin x = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

$$\underline{\underline{u(x,y) = \sin x\cosh y, \quad v(x,y) = \cos x\sinh y}}$$

[15] Připomínka: $\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i}$, podobně vzorce pro sinh a cosh.

4 Derivace holomorfní funkce, Cauchyho-Riemannovy podmínky

- Připomeňme: $z = x + yi$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- Derivace funkce f v bodě z_0 je definována limitou:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w}.$$

- Z uvedené definice se dají „vydolovat“ předpisy derivace f pomocí u a v. [16] Dostáváme, že

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

respektive (při druhém způsobu výpočtu limity)

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Připomeňme, že výrazem $\frac{\partial u}{\partial x}$ rozumíme **parciální derivaci funkce** u **podle proměnné** x a výrazem $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ **hodnotu této derivace v bodě** (x_0, y_0), analogicky pro ostatní členy.

Vidíme tedy, že máme dva způsoby, jak vyjádřit derivaci funkce f. Protože oba způsoby musejí jít, a musejí logicky dát stejný výsledek, tak musí platit

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí (které si musejí odpovídat, aby rovnost platila) dostáváme tzv. **Cauchyho-Riemannovy podmínky**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Pomůcka k zapamatování: Když si $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$ čtu „po řádcích“, u, v, x, y je seřazené podle abecedy. Takže podmínka s $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$ žádné mínus neobsahuje. Ta druhá ano (a tam je zase jedno, na kterou stranu dáme mínus, rovnost se tím neporuší).

- Má-li tedy funkce v bodě derivaci, musí v tomto bodě být splněny Cauchyho-Riemannovy podmínky. Aby tyto byly splnitelné, potřebujeme, aby u a v byly diferencovatelné (tj. „derivovatelné“) v bodě (x_0, y_0). Spojením těchto pozorování dostáváme tvrzení, uvedené ve skriptech.

[16] Převedením na dvourozměrné reálné limity a blížením z k z_0 nejprve jen za pomoci reálných a pak za pomoci ryze imaginárních čísel, bude předvedeno u tabule.

- Funkci f nazveme **holomorfní** na otevřené množině M, pokud v každém bodě množiny M má funkce f derivaci. Funkci nazveme **holomorfní v bodě** z_0, pokud existuje $f'(z_0)$ a zároveň existuje $r > 0$ takové, že derivace existuje i na $\mathcal{U}(z_0, r)$.

  Jinak řečeno, to, že funkce má derivaci v každém bodě (otevřené množiny), znamená, že je holomorfní na množině. Ale to, že má funkce derivaci v bodě, ještě neznamená, že je v tomto bodě holomorfní!! Potřebujeme i diferencovatelnost na nějakém okolí. Klidně libovolně malém okolí, stejně má toto okolí nekonečno bodů. Derivace v jediném bodě sama o sobě nic neznamená.

- **Příklad:** $f(z) = (\text{Re } z)^3$. Zjistěme, ve kterých bodech má f derivaci, a kde je holomorfní.

  Nejprve nalezněme u a v: $f(x+yi) = (\text{Re } (x+yi))^3 = x^3 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = x^3,\ v(x,y) = 0.$
  Potřebujeme nalézt první parciální derivace u a v:

  $$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0.$$

  Z Cauchyho-Riemannových podmínek dostáváme

  $$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \qquad -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

  Druhá podmínka je splněna vždy (0=0), první podmínka, tj. $3x^2 = 0$, je splněna pouze pro $x = 0$.

  Jinými slovy, zadaná funkce má derivaci pouze v takových bodech $z = x + yi$, pro které platí $x = 0$, tedy v ryze imaginárních číslech (svislá osa). Holomorfní není NIKDE, protože derivaci má pouze v bodech přímky, pokud na přímce vybereme libovolně malé okolí nějakého bodu, bude toto okolí obsahovat i jiné body než body přímky, tedy body, ve kterých funkce f nemá derivaci.

- **Jiný příklad:** $f(z) = z^2$
  $f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = x^2 - y^2,\ v(x,y) = 2xy$

  $$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x, \qquad -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -(-2y) = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y.$$
  $$2x = 2x, \qquad 2y = 2y$$

  Podmínky jsou splněny v libovolném bodě. Zadaná funkce má derivaci na celém $\mathbb{C}$. Je tedy i holomorfní na celém $\mathbb{C}$.
  Pozn.: Pokud předpis funkce vypadá nějak „klasicky“, tj. polynom, elementární funkce, apod., většinou má derivaci všude. Problémové jsou situace, spjaté s komplexními pojmy jako $\overline{z}, \arg z$, apod., a dále u všech funkcí body, kde funkce utíká do nekonečna, např. bod 0 u funkce $\frac{1}{z}$ atd.

- Symbolem Δ rozumíme tzv. **Laplaceův operátor**, jedná se o diferenciální operátor, který je speciálně pro funkce dvou proměnných definován jako

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y).$$

- **Reálnou** funkci u nazveme **harmonická**, pokud platí $\Delta u = 0$.

- Funkce u a v nazveme **harmonicky sdružené**, pokud jsou harmonické a splňují Cauchyho-Riemannovy podmínky.

- Můžeme si prozradit, že když je funkce f holomorfní, tak má derivaci libovolného řádu (tzn. když existuje $f'(z)$, existuje i $f''(z), f'''(z), ...$). To u reálných funkcí rozhodně neplatí.

  Mějme tedy holomorfní funkci f a spočtěme si f'':

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \quad \Rightarrow \quad f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)$$

  A nyní použijme druhý způsob výpočtu derivace:[17]

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \quad \Rightarrow \quad f''(z) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)$$

  Opět, dvakrát jsme jinou cestou počítali to samé, takže se to musí rovnat, potažmo, musí se rovnat reálné a imaginární části:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

  Takže jsme vlastně zjistili, že je-li funkce f holomorfní, **MUSÍ být funkce u a v harmonicky sdružené.**

[17] Uvědomme si, že se u něj u a v „prohodí“ a imaginární část změní znaménko.

- **Příklad:** $v(x,y) = 2xy - 2y$. Nalezněme $u(x,y)$ tak, aby $f = u + iv$ byla holomorfní funkce.

Nejprve bychom formálně měli ověřit, že v je harmonická. Pokud by harmonická nebyla, logicky by nemohla ani být s ničím harmonicky sdružená, tudíž by žádné takové u které máme najít neexistovalo.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (2y)'_x = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (2x-2)'_y = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0 + 0 = 0.$$

Harmonická tedy je, můžeme se pokusit nalézt u. K tomu použijeme fakt, že u a v mají splňovat Cauchyho-Riemannovy podmínky. Začněme první podmínkou:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2$$

Zjistili jsme, čemu se má rovnat derivace u podle x. Jak teď zjistíme u? No použijeme opačný proces k derivaci, budeme tedy **integrovat** podle x:

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x = \int (2x-2)\mathrm{d}x = x^2 - 2x + \psi(y).$$

Tak počkat, co to je za zradu, jaké $\psi(y)$? Musíme si uvědomit, že u je obecně funkcí dvou proměnných: x a y. Derivujeme-li podle jedné proměnné, druhou proměnnou bereme jako konstantu. Tzn., že derivací podle x „zlikvidujeme“ jakýkoliv sčítanec, obsahující pouze proměnnou y. To je při integraci podle x třeba vzít v potaz. Je to něco podobného, jako se u integrování reálné funkce v prváku psalo „$+C$“ (na což ještě taky dojde). Důvod byl stejný, pouze tady nejde jen o číslo, ale celou možnou funkci proměnné y.

No dobrá, ale jak zjistíme, co je to $\psi(y)$? To dostaneme právě ze druhé Cauchyho-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2x + \psi(y)\right) = \psi'(y),$$

$$\psi'(y) = -2y \qquad \Rightarrow \qquad \psi(y) = \int -2y\mathrm{d}y = -y^2 + C.$$

Takže jsme našli ψ, teď stačí dosadit do toho, co jsme o u zjistili první podmínkou a máme výsledek:

$$\underline{\underline{u(x,y) = x^2 - 2x - y^2 + C}}$$

Poslední, co by nám mohlo vrtat hlavou je, čemu je rovno C, a jestli by se pak dala dohromady nějak funkce $f = u + iv$ zapsat jen pomocí z, a ne x, y.

Abychom určili C, potřebujeme nějakou dodatečnou podmínku:

Příklad: Máme u z minulého příkladu. Určeme C, má-li platit $f(3+i) = 2$.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad u(x,y) = x^2 - 2x - y^2 + C, \quad v(x,y) = 2xy - 2y,$$

$$3+i \quad \Rightarrow \quad x = 3, y = 1, \qquad f(3+i) = 2 = 2 + i \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad u(3,1) = 2, \quad v(3,1) = 0,$$

$$2 = u(3,1) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 1^2 + C = 9 - 6 - 1 + C = 2 + C \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{C = 0}}$$

Takže naše finální, jednoznačné u má podobu $u(x,y) = x^2 - 2x - y^2$. Poslední, co můžeme zkusit, je zapsat funkci f pomocí z. To může být trochu alchymie, jde o to si k sobě vhodně naskládat správné členy. Nutno podotknout, že toto už je spíše estetický úkon, nicméně u zkoušky může být hodnocen bodem.

$$f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - 2x - y^2 + i(2xy - 2y) =$$

$$= x^2 + 2xyi - y^2 - 2x - 2yi = (x+yi)^2 - 2(x+yi) = \underline{\underline{z^2 - 2z}}$$

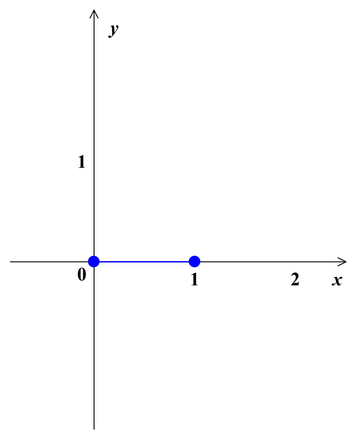
- Derivace „hezkých“ funkcí **jsou stejné jako v reálném oboru**, tzn. nemusí se pokaždé počítat pomocí u a v. Např. $(z^3 + 2z + 1)' = 3z^2 + 2$, $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$, $(\sin z)' = \cos z$ atd.

- **Význam derivace:** U reálných funkcí jedné proměnné měla derivace význam - byla rovna směrnici tečny ke grafu v daném bodě, tedy přenesně vyjadřovala lokální „míru změny“ dané veličiny. I v komplexním oboru má derivace svou interpretaci, a také je de facto mírou změny. Nicméně jsme v rovině, takže změna může mít dva různé významy:
  - ⋄ $|f'(z_0)|$ nazýváme **koeficient roztažnosti**,
  - ⋄ $\arg f'(z_0)$ nazýváme **úhel otočení**.

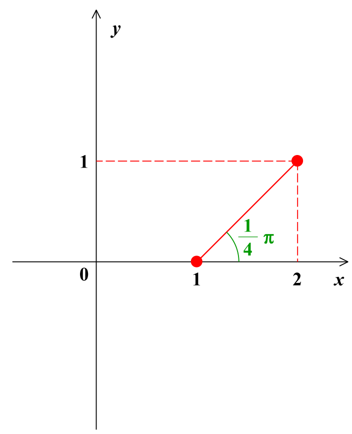
  A přestože matematici (a vědci obecně) často bývají v pojmenovávání věcí poměrně tragičtí, tyto názvy jsou přesně to, co byste očekávali. Koeficient roztažnosti nám vlastně říká, o kolik se vzdálenosti v okolí daného bodu zvětší, úhel otočení zase říká, o kolik se jednotlivé objekty otočí.

Příklad: $f(z) = (1+i)z+1$. Ihned lze vidět, že $f'(z) = 1+i$, tudíž máme konstantní derivaci, tedy i konstantní k.r. a ú.o.: $|f'(z)| = \sqrt{2}$, $\arg f'(z) = \frac{\pi}{4}$.
A skutečně, vezměme nyní jakožto testovací křivku úsečku $[0,0],[1,0]$, tj. křivku $\gamma(t) = t,\ t \in \langle 0, 1 \rangle$. Když tuto zobrazíme pomocí funkce f, dostaneme křivku $f(\gamma(t)) = (1+i)t+1 =$

$t+1+it,\ t \in \langle 0,1 \rangle$. Když si situaci nakreslíme, zjistíme, že původní úsečka skutečně zarotovala o $\frac{\pi}{4}$ a zvětšila svou délku $\sqrt{2}$-krát:



(a) Křivka $\gamma(t) = t,\ t \in \langle 0,1 \rangle$



(b) Křivka $f(\gamma(t)) = t + 1 + it, t \in \langle 0,1 \rangle$

5 Konformní zobrazení, lineární lomené funkce

- Připomenutí:
  - Symbolem $\mathcal{U}(z_0, r)$ rozumíme r-okolí bodu z_0, tj. otevřený kruh se středem z_0 a poloměrem r.
  - Množinu nazveme **otevřená**, když neobsahuje žádný bod své hranice, tedy s každým svým bodem obsahuje i nějaké jeho (celé) okolí.
  - Množinu nazveme oblastí, je-li otevřená a souvislá („z jednoho kusu").
- Funkci nazveme **prostá**, jestliže každá dvě různá čísla zobrazí na různý výsledek, tedy každý prvek definičního oboru má svou unikátní funkční hodnotu. Symbolicky zapsáno

$$\forall z_1, z_2 \in D_f : \ z_1 \neq z_2 \ \Rightarrow \ f(z_1) \neq f(z_2).$$

  Pozn.: Je dobré si uvědomit, že je-li funkce prostá, její inverze je jednoznačná funkce.

  Např.:

  - $f(z) = z^4$ není prostá, neboť například $f(1) = f(-1) = f(i) = f(-i) = 1$. Její inverze je 4. odmocnina, což, jak již víme, je 4-značná funkce.
  - $f(z) = \mathrm{e}^z$ není prostá, je $2\pi i$-periodická, takže každá dvě čísla, lišící se vzájemně o násobek $2\pi i$, mají stejnou funkční hodnotu. Její inverze je $\mathrm{Ln}\ z$, což je nekonečněznačná funkce.
  - $f(z) = 3z + 1$ je prostá. Její inverze je $f^{-1}(z) = \frac{z-1}{3}$, což je jednoznačná (a také prostá) funkce.
- Funkci $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ nazveme **konformní** na **otevřené** množině G, jestliže je f spojitá a prostá na G a má derivaci ve všech bodech množiny G, vyjma konečně mnoha.

  Např. funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ je konformní na celém $\mathbb{C}_\infty$:
  Jelikož ji lze zapsat jako z^{-1}, její inverze je $z^{\frac{1}{-1}} = z^{-1}$, což je jednoznačná funkce. [18] Navíc, f má derivaci všude krom jediného bodu, a to $z = 0$.
- Konformní funkce mají tu vlastnost, že pro všechna konečná z s konečnou funkční hodnotou platí $f'(z) \neq 0$. Uvažme nyní 2 křivky k_1, k_2, které se protínají v bodě z_0 (tj. $k_1(t_0) = k_2(t_0) =$

[18] Méně opisně, funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ je inverzí sama k sobě, platí $(f \circ f)(z) = z$. Takovým zobrazením se někdy říká *involuce*, dalším jejím příkladem je třeba $f(z) = \overline{z}$.

z_0), a jejich obrazy pomocí konformní funkce f. Platí:

$$w_1(t) = f(k_1(t)), \quad w_2(t) = f(k_2(t))$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$w_1'(t_0) = f'(k_1(t_0)) \cdot k_1'(t_0) = f'(z_0) \cdot k_1'(t_0)$$

$$\arg w_1'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg k_1'(t_0)$$

$$\arg w_2'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg k_2'(t_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\arg w_1'(t_0) - \arg w_2'(t_0) = \arg k_1'(t_0) - \arg k_2'(t_0),$$

a protože derivaci křivky lze chápat jako tečný prvek v bodě, a její argument tedy jako sklon tečny, tak jsme vlastně zjistili, že konformní funkce **zachovávají úhly mezi křivkami**.

- Konformní funkce zobrazují oblasti na oblasti (zachovávají otevřenost a souvislost), a jejich inverze je také konformní.

- Otevřené množiny G_1, G_2 nazveme **konformně ekvivalentní**, jestliže na G_1 existuje konformní funkce f taková, že $f(G_1) = G_2$.

- Speciálním a asi nejdůležitějším typem konformních zobrazení jsou **lineární lomené funkce**, které jsou definovány jednoduše jako podíl dvou lineárních funkcí:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, z \in \mathbb{C},$$

přičemž a, b, c, d jsou libovolné komplexní koeficienty, takové, že platí $ad \neq bc$. **Pokud by koeficienty toto nesplňovaly, nejednalo by se o konformní zobrazení**, neboť

$$ad = bc \;\Rightarrow\; \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{bc}{d}z + b}{cz + d} = \frac{bcz + bd}{d(cz + d)} = \frac{b(cz + d)}{d(cz + d)} = \frac{b}{d},$$

což by byla konstantní a tedy rozhodně nikoliv prostá funkce.

- Platí

$$f(\infty) = \frac{a}{c}, \qquad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

- Důvodem, proč se zabýváme lineárními lomenými funkcemi je, že jde o **jediná** konformní zobrazení $\mathbb{C}_\infty$ na $\mathbb{C}_\infty$.
- Speciální případ lineární lomené funkce je při volbě $c = 0, d = 1$ funkce $az + b$, tedy obyčejná lineární funkce.[19]
- **Zobecněnou kružnicí** rozumíme libovolnou kružnici nebo přímku. Přímku můžeme veeeelmi volně řečeno chápat jako kružnici se středem ve „vhodném“ nekonečnu a nekonečným poloměrem. Ke přímce tedy počítáme i bod ∞.
- Obrazem zobecněné kružnice při zobrazování lineární lomenou funkcí je opět zobecněná kružnice. Obecně, pokud se nějaký bod původní zobecněné kružnice zobrazí na ∞, bude obrazem přímka, jinak kružnice.

Př.: $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$, $M = \mathcal{U}(0,1)$. Určete a znázorněte $f(M)$.

Máme zadánu množinu, jejíž hranicí je jednotková kružnice. Prvním krokem tedy je zjistit, zda se hranice zobrazí na přímku či kružnici. Jelikož $f(1) = \frac{2}{0} = \infty$ a bod 1 na hranici M leží, zobrazí se hranice na přímku. K jejímu určení můžeme použít 2 různé způsoby - buďto dosadit libovolné dva body (různé od 1) z kružnice, a výslednými body povedeme přímku, nebo tak učiníme pouze s jedním bodem a využijeme toho, že konformní zobrazení zachovávají úhly mezi křivkami.

Zkusme první způsob. Vyberme si např. body -1 a i:

$$f(-1) = \frac{-1+1}{-1-1} = 0, \qquad f(i) = \frac{i+1}{i-1} = \frac{1+i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{(1+i)(-1-i)}{2} = -\frac{2i}{2} = -i.$$

Oba nalezené body leží na imaginární ose, obrazem hranice je tedy imaginární osa. K témuž jsme mohli dojít i druhým způsobem:
$f(-1) = 0$, původní kružnice prochází reálnou osu kolmo. Dále víme, že reálná osa se zobrazí na reálnou osu - koeficienty zadané funkce jsou všechny reálné, dosazováním reálných čísel jiná, než reálná čísla nedostaneme. V důsledku tedy bude naše přímka kolmá na reálnou osu. Jelikož prochází bodem 0, jedná se o imaginární osu.

Nalezli jsme tedy hranici, zbývá určit „na kterou stranu“ hranice se zobrazí vnitřek množiny M. Nejjednodušší způsob jak to zjistit, je vzít libovolný bod vnitřku (např. 0), dosadit jej

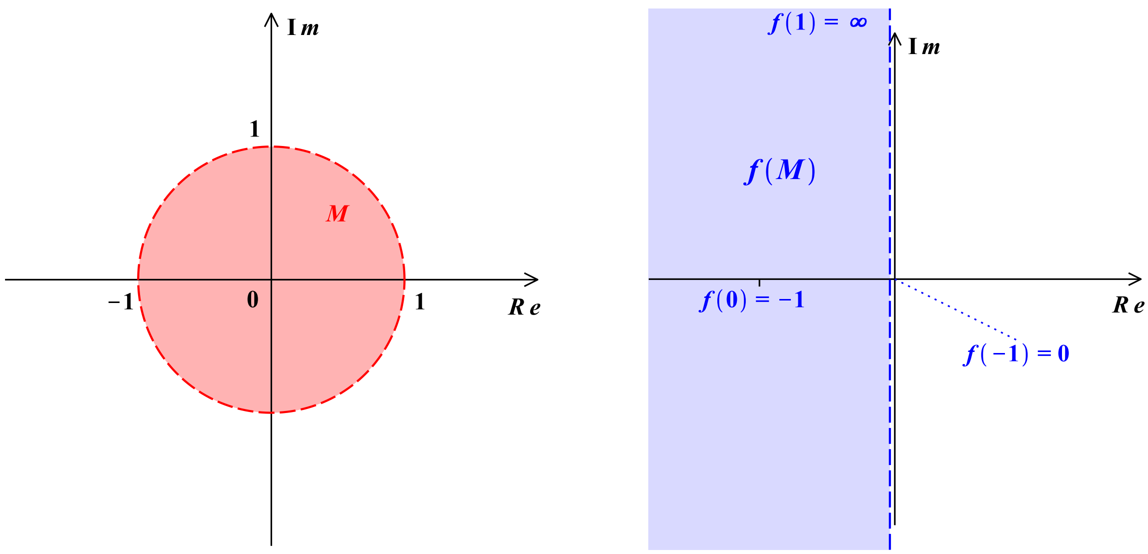
[19] Jelikož násobíme komplexním číslem a a přičítáme b, jedná se vlastně o zobrazení, které mezi body v Gaussově rovině zvětšuje vzdálenosti $|a|$-krát (stejnolehlost), rotuje o $\arg a$ a posouvá o b.

do f a podívat se, kde se octneme:

$$f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1, \text{ tento bod je nalevo od imaginární osy,}$$

takže $f(M)$ je tedy celá levá polorovina s hranicí v podobě imaginární osy, symbolicky zapsáno

$$\underline{\underline{f(M) = \{z \in \mathbb{C} : \text{ Re } z < 0\}}}.$$



(a) Množina $M = \mathcal{U}(0,1)$ (b) Množina $f(M) = \{z \in \mathbb{C} : \text{ Re } z < 0\}$

- Další vlastností lineárních lomených funkcí je, že jsou jednoznačně určeny trojicí (vzájemně různých) bodů a jejich (konečných) obrazů.

Př.: Určete lineární lomenou funkci f takovou, že $f(0) = -i, f(1) = 1, f(i) = 0$.

Jinými slovy, máme určit koeficienty a, b, c, d. Dosazením toho, co známe získáme 3 rovnice:

$$-i = f(0) = \frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} = \frac{b}{d} \quad \Rightarrow \quad b = -di,$$

$$1 = f(1) = \frac{a \cdot 1 + b}{c \cdot 1 + d} = \frac{a+b}{c+d} \quad \Rightarrow \quad a + b = c + d,$$

$$0 = f(i) = \frac{a \cdot i + b}{c \cdot i + d} \quad \Rightarrow \quad b = -ai,$$

$$-ai = b = -di \quad \Rightarrow \quad a = d \quad \Rightarrow \quad a + b = d - di = c + d \quad \Rightarrow \quad c = -di = b.$$

K dořešení potřebujeme čtvrtou informaci. Zvolme tedy $b = 1$. Odtud a ze zjištěných informací $b = c, a = d = bi$ dostáváme $c = 1, a = d = i$, takže hledaná funkce má tvar

$$\underline{\underline{f(z) = \frac{iz+1}{z+i}}}\ .$$

Pozn.: Čím to, že jsme si mohli b zvolit? Jak jsme řekli, dá se dokázat, že lineární lomená funkce je jednoznačně určená trojicí bodů a jejich obrazů. Při jiné volbě b by nám vyšel zlomek, v němž by se dalo krátit, a dostali bychom totéž, viz Příklad 9b.

6 Opakování křivek, integrál komplexní funkce

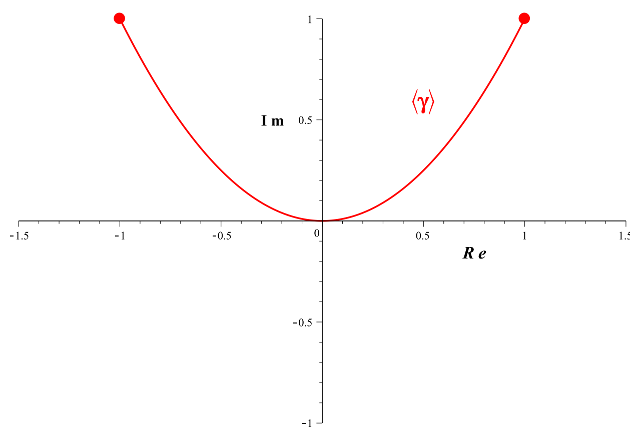
- Připomeňme: **Křivkou** rozumíme komplexní funkci reálné proměnné, která zobrazuje nějaký číselný interval na množinu komplexních čísel (obrazově skutečně křivku, „čáru“). Zpravidla zadaná předpisem $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t),\ t \in \langle a, b\rangle$.

- Samotný nákres křivky v Gaussově rovině nazýváme **geometrickým obrazem** křivky γ, a značíme jej $\langle\gamma\rangle$. A naopak, křivku γ nazýváme **parametrizací množiny** $\langle\gamma\rangle$.

- Chceme-li křivku znázornit, je v obecném případě jednou z možností si γ_1 představit jako „x“ a γ_2 jako „y“, a následně si vyjádřit jejich vztah, nejčastěji „y = nějaký výraz s x“.

Př.: $\gamma(t) = t + it^2, \quad t \in \langle -1, 1\rangle$.

„x“ $= t$, „y“ $= t^2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2, x \in \langle -1, 1\rangle$:



- Nikoho snad nebude příliš šokovat, že pokud je definičním oborem křivky interval $\langle a, b\rangle$, pak $\gamma(a)$ nazýváme **počátečním**, a $\gamma(b)$ **koncovým** bodem křivky γ. Křivku nazveme **uzavřenou**, jestliže její počáteční a koncový bod je stejný.

- Křivky, které nás budou zajímat nejčastěji jsou kružnice. Už víme, že jakožto množiny jsou dány podmínkou s absolutní hodnotou. Parametrizace kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem r pak vypadá následovně:

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in \langle a, a + 2\pi\rangle.$$

Začátek intervalu a je nejčastěji 0, kružnice je však obrazem pro jakýkoliv interval délky 2π.

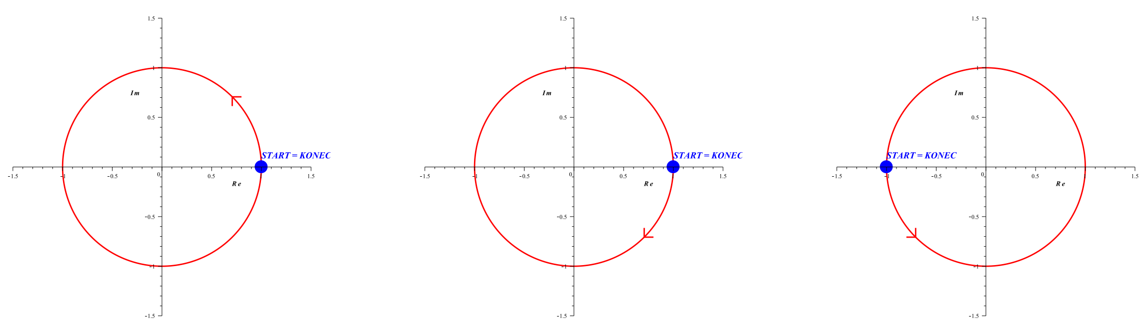
- NICMÉNĚ, na několik věcí je třeba si u křivek s ohledem na integrály dát pozor, a to:

- ◇ **orientace**, tj. směr, kterým křivka vede,
- ◇ **uzavřenost**, viz výše,
- ◇ **opakování části úseku**, tj. překrývání (např. kdybychom u kružnice nekroužili o 2π, ale třeba o 3π).

Pojďme si teď ukázat několik detailů, na které je dobré brát zřetel přímo u kružnic.

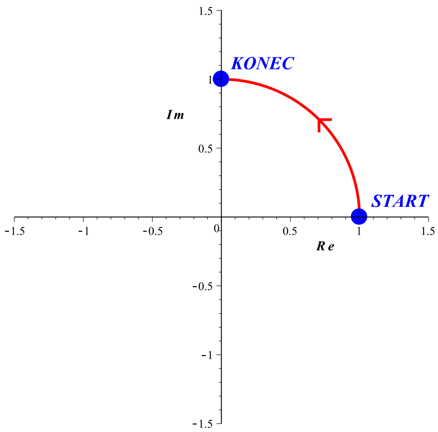
- Kružnice v základním tvaru krouží **proti** směru hodinových ručiček. Pokud máme místo e^{it} křivku zadanou s e^{-it} znamená to, že kroužíme na opačnou stranu, tedy **po směru** ručiček.
- V předpisu kružnice se exponent může lišit ještě jinak:
  - ◇ $$\mathrm{e}^{i(t+c)},\ t \in \langle a, b\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{it},\ t \in \langle a+c, b+c\rangle,$$
  - ◇ $$c > 0: \quad \mathrm{e}^{c \cdot it},\ t \in \langle a, b\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{it},\ t \in \langle c \cdot a, c \cdot b\rangle$$

  Formálně bychom pro záporné c měli „nový“ interval psát jako $\langle c \cdot b, c \cdot a\rangle$. Jenže tímto „otočením“ intervalu bychom zase mínus do exponentu museli vrátit, abychom při tomto přepisu zachovali směr orientace. Pro $c = -1$ nemáme nic jiného, než poznámku výše.
- Máme-li zadanou křivku $z_0 - r\mathrm{e}^{it}$, tak bude výsledný obraz **středově otočený podle** z_0. Jinak řečeno, pokud máme celé kružnice, jediné, co se změní je počáteční bod. V případě oblouku bude tento oblouk „převrácený“ podle bodu z_0.

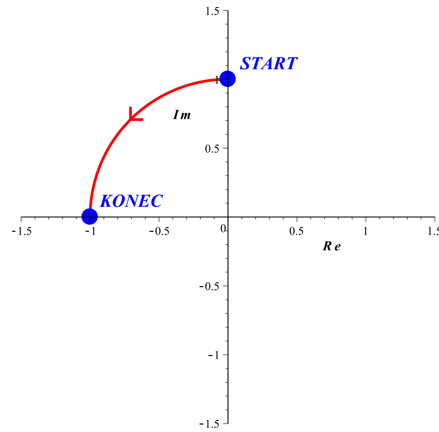


(a) $\gamma(t) = \mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (b) $\gamma(t) = \mathrm{e}^{-it},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (c) $\gamma(t) = -\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

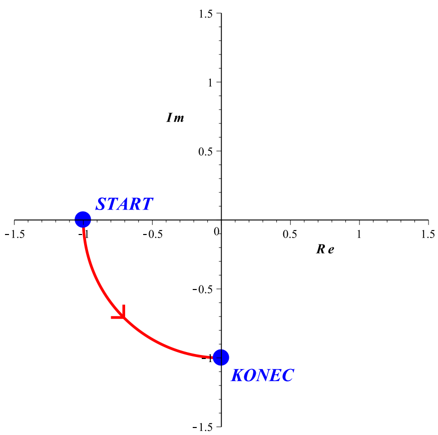
Obrázek 13: Chování kružnic, zadaných křivkami s různým předpisem



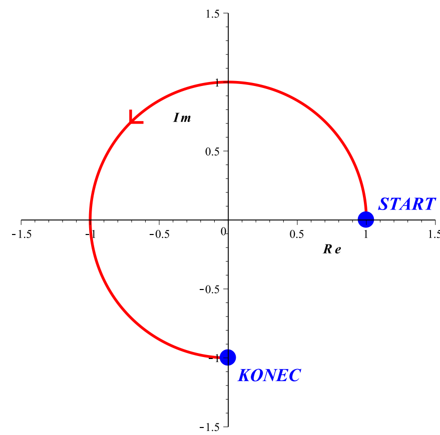
(a) $\gamma(t) = \mathrm{e}^{it},\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$



(b) $\gamma(t) = \mathrm{e}^{i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)},\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$



(c) $\gamma(t) = -\mathrm{e}^{it},\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$



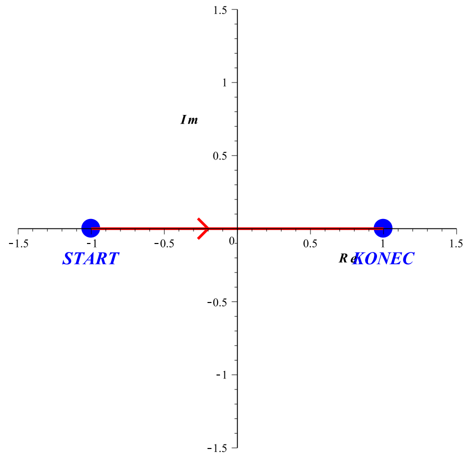
(d) $\gamma(t) = \mathrm{e}^{3it},\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Obrázek 14: Geometrické obrazy různých modifikací úseku kružnice

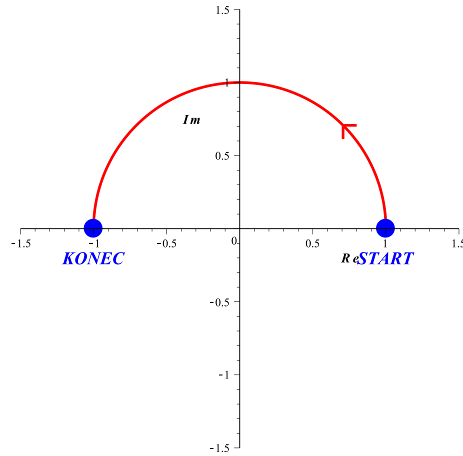
- Všimněme si, že středová souměrnost podle z_0 u $z_0 - r\mathrm{e}^{it}$ není v praxi nic jiného, než otočení o další π navíc (viz Obrázky 14a a 14c), což se dá jednoduše zdůvodnit:

$$z_0 - r\mathrm{e}^{it} = z_0 + r \cdot (-1) \cdot \mathrm{e}^{it} = z_0 + r \cdot \mathrm{e}^{\pi i} \cdot \mathrm{e}^{it} = z_0 + r\mathrm{e}^{\pi i + it} = z_0 + r\mathrm{e}^{i(t+\pi)}.$$

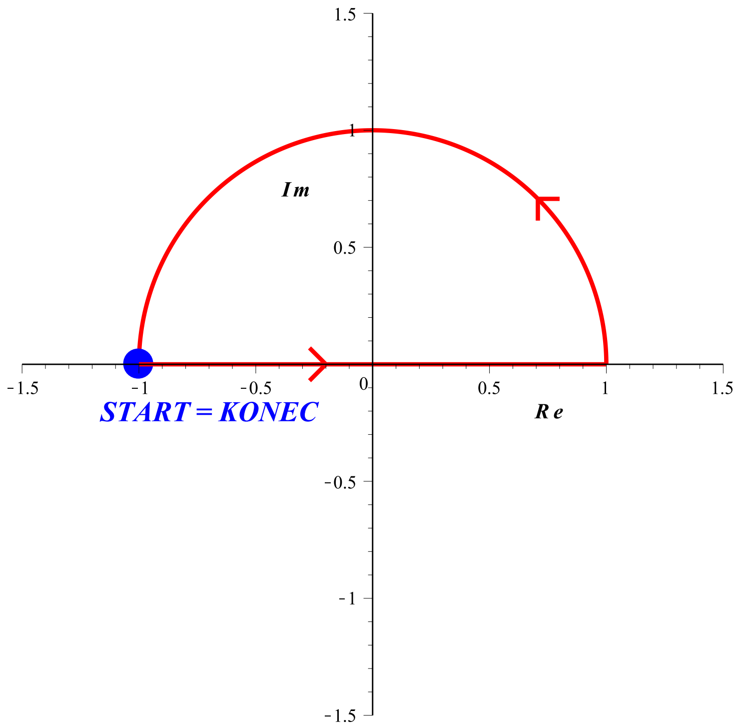
- Pokud máme křivku definovanou po částech, je výsledným obrazem sjednocení jednotlivých částí:



(a) $\gamma(t) = t + 1,\ t \in \langle -2, 0 \rangle$



(b) $\gamma(t) = \mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, \pi \rangle$



(c) $\gamma(t) = \begin{cases} t + 1, & t \in \langle -2, 0 \rangle \\ \mathrm{e}^{it}, & t \in \langle 0, \pi \rangle \end{cases}$

- **Derivace** křivky představuje jakýsi tečný vektor ke křivce a počítáme ji „klasicky“ (křivka je funkce jedné reálné proměnné).

- **Integrál z funkce f podél křivky** γ značíme $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.
- Není-li řečeno jinak (většinou bude řečeno jinak, ale o tom až příště), počítáme takovýto integrál převodem na integrál přes reálnou proměnnou, který již počítáme tak, jak to známe, s jediným rozdílem, že se mohou objevovat komplexní výrazy. Je-li definičním oborem křivky γ interval $\langle a, b\rangle$, počítáme integrál takto:[20]

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Pozn.: Aby toto platilo, musí být ještě funkce na obrazu křivky γ spojitá (nemít tam skok/nekonečnou hodnotu).

Př.: $f(z) = z^2,\quad \gamma(t) = \mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, \pi\rangle$

$$\gamma'(t) = i\cdot\mathrm{e}^{it},\qquad \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^\pi (\mathrm{e}^{it})^2\cdot(i\cdot\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t = i\int_0^\pi \mathrm{e}^{3it}\mathrm{d}t = i\left[\frac{\mathrm{e}^{3it}}{3i}\right]_{t=0}^{\pi} = \frac{\mathrm{e}^{3\pi i}-\mathrm{e}^0}{3} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$$

- Opět, máme-li křivku definovanou po částech (které se až na body **nepřekrývají!**), integrál přes tuto křivku je definován jako součet integrálů přes jednotlivé části, tj.

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t\in\langle a_1, b_1\rangle \\ \gamma_2(t), & t\in\langle a_2, b_2\rangle \\ & \vdots \\ \gamma_n(t), & t\in\langle a_n, b_n\rangle \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

- Integrály přes stejné křivky, které se liší pouze orientací, se výsledkem **liší ve znaménku**. Všimněte si analogie s „obyčejnými“ jednorozměrnými reálnými integrály, kde platilo $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

[20]Pozornému čtenáři možná neunikla podobnost s metodou substituce u „klasického“ integrování.

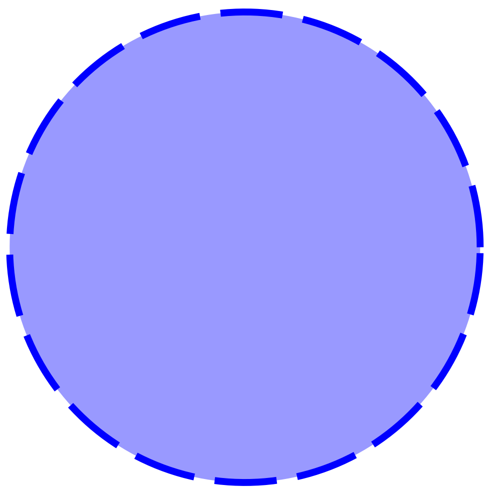
7 Cauchyho věta, Cauchyho integrální vzorce, nezávislost na cestě

- Připomeňme, že křivku $\gamma(t), t \in \langle a, b\rangle$ nazveme **uzavřenou**, jestliže $\gamma(a) = \gamma(b)$. Křivku nazveme **jednoduchou uzavřenou**, jestliže je uzavřená a jediné místo, kde funkční hodnoty splývají, jsou body a, b (jinak řečeno, křivka sama sebe neprotíná, ani nekrouží opakovaně).

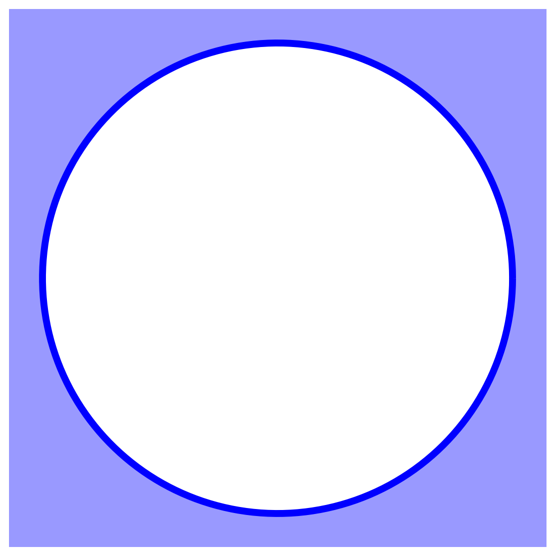
- **Oblast** je otevřená a souvislá množina (neobsahuje svou hranici a je z jednoho kusu).

- Oblast Ω nazveme **vnitřkem uzavřené křivky** γ a značíme int γ, jestliže platí $\partial\Omega = \langle\gamma\rangle$ a $\infty \notin \Omega$. Slovy - obraz křivky γ je hranicí množiny Ω, a Ω neobsahuje nekonečno. Co tím myslíme, je asi každému jasné.[21]

- Oblast je **jednoduše souvislá**, pokud její doplněk je souvislý. Jinak řečeno, nemá v sobě „díry“. n-**násobně souvislá** oblast pak v sobě má $n-1$ „děr“ (její doplněk má n komponent).



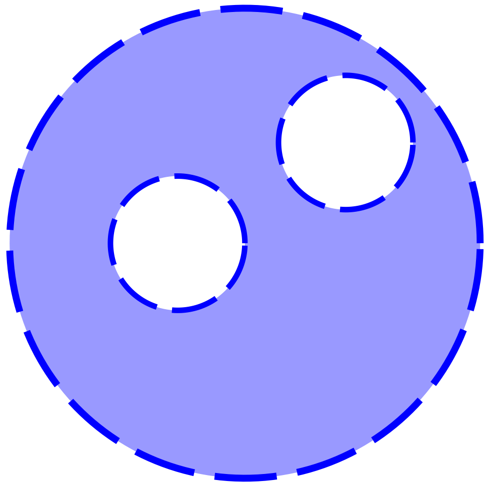
(a) Příklad jednoduše souvislé oblasti



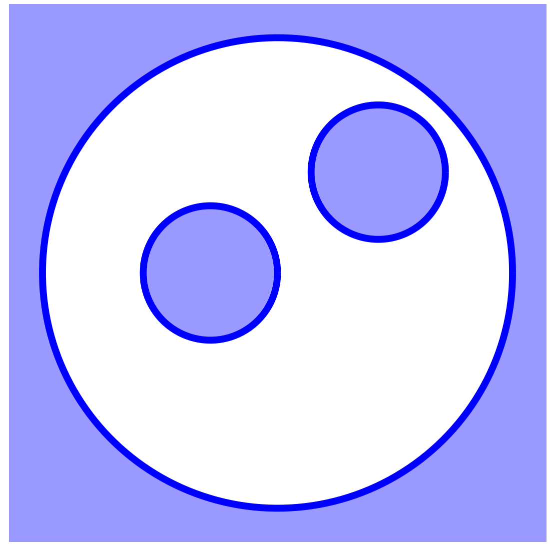
(b) Doplněk jedn.souvislé oblasti je z jednoho kusu

Vidíme, že vnitřkem jednoduché uzavřené křivky je jednoduše souvislá oblast.

[21] Podobně se dá definovat i vnějšek.



(c) Příklad trojnásobně souvislé oblasti



(d) Doplněk trojnásobně souvislé oblasti má 3 kusy

Odtud vidíme, že n-násobně souvislá oblast má hranici tvořenou n křivkami.

- **Cauchyho věta:** Jestliže je γ jednoduchá uzavřená křivka a f je holomorfní na int γ (a spojitá i na $\langle\gamma\rangle$), pak platí
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$
Pozn.: Pokud je f holomorfní, můžeme si ji volně představit jako potenciálové pole, např. pole okolo náboje. Integrál si zde můžeme představit jako množství práce, potažmo energie. Pokud v potenciálovém poli těleso obkrouží uzavřenou dráhu, vykoná nulovou práci. Nás však v kurzu (i v praxi) zajímají situace, kdy pole NENÍ potenciálové (f není holomorfní) - tj. máme proud. Což se asi občas může hodit.

- Nejjednodušeji řečeno, že funkce f není na int γ holomorfní poznáme tak, že má uvnitř křivky jednu nebo více *singularit* (pojem, kterému se budeme věnovat v pozdějších cvičeních). V tuto chvíli tím velice zjednodušeně budeme chápat body, ve kterých integrovaná funkce „utíká“ do nekonečna. Zpravidla jsou to prostě a jednoduše body, ve kterých bychom dělili nulou, tzn. u funkce $\frac{1}{z}$ je to $z = 0$, u funkce $\frac{1}{z^2-1}$ jsou to body $z = 1$ a $z = -1$, atd.

- Je-li Ω n-násobně souvislá oblast, s hranicí tvořenou n křivkami, tj. $\partial\Omega = \langle\gamma_1\rangle \cup \langle\gamma_2\rangle \cup \ldots \cup \langle\gamma_n\rangle$, pak platí
$$\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

- Další věc, která z Cauchyho věty plyne je, že pokud máme uvnitř křivky jednu singularitu, bude integrál přes libovolně malou kružnici se středem v singularitě shodný s původním integrálem. Je-li jich tam víc, integrál je roven součtu integrálů přes tyto maličké kružnice, viz předchozí bod.

- A jak tedy spočítáme integrál se singularitou? Na to nám dává odpověď následující:

Cauchyho integrální vzorce: Nechť γ je jednoduchá uzavřená křivka, $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$, a f je holomorfní na int γ a spojitá až do $\langle\gamma\rangle$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ platí

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z_0),$$

speciálně pro $n = 1$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

- Symbolem $f^{(n-1)}(z_0)$ rozumíme $(n-1)$-ní derivaci funkce f v bodě z_0. Tyto derivace budeme počítat tak, jak známe z jiných kurzů (pro holomorfní f platí stejná pravidla pro derivaci jako v reálném oboru, netřeba tedy vyčíslovat derivaci přes u a v).

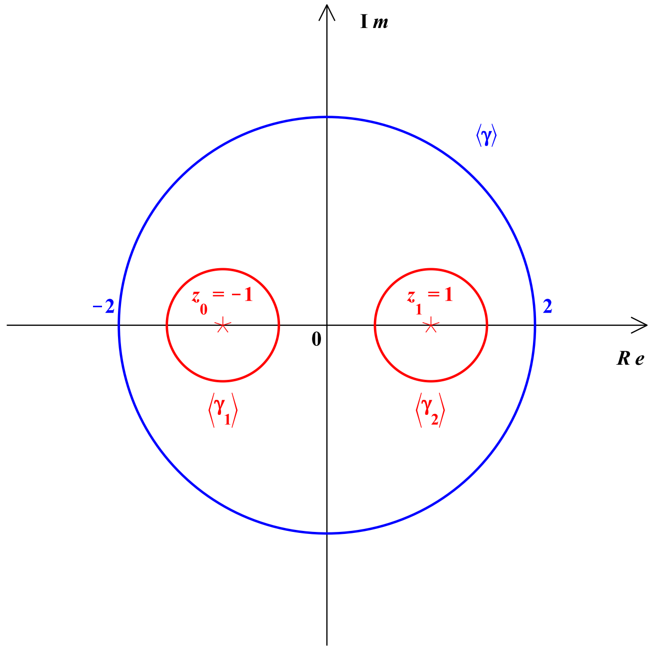
  Problém by byl, pokud by derivace f neexistovaly. Ale jak už jsme naznačili v Kapitole 4, je-li funkce holomorfní, má už libovolnou derivaci. Viz skripta.

- Při výpočtu integrálu po uzavřené křivce tedy postupujeme takto:
  - Nejprve se podíváme, jestli má funkce f singularity, a jestli tyto leží v int γ.[22] Pokud ne, integrál je roven 0. **POZOR!** To, že funkce uvnitř křivky singularitu má ještě neznamená, že zadaný integrál nemůže stejně vyjít 0.
  - Máme-li singularitu v bodě z_0, pokusíme se integrovanou funkci zapsat tak, aby bylo ve jmenovateli jen $z - z_0$ s příslušnou mocninou. Často nám při tomto zápisu vznikne složený zlomek.
  - Čitatel pak bereme jako funkci f, vystupující v Cauchyho integrálních vzorcích.
  - Spočítáme dílčí integrály pro každou singularitu a poté je sečteme.

- **Příklad:** Spočítejme $\int_\gamma \frac{z}{z^2-1} \mathrm{d}z$, $\gamma(t) = 2e^{it}, t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Zadaná křivka je kružnice se středem v počátku a poloměrem 2. Co se zadané funkce týče, $\frac{z}{z^2-1} = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$, vidíme tedy, že máme dvě singularity, -1 a 1. Tyto obě leží uvnitř naší křivky:

[22] Sranda by končila, kdyby byla singularita přímo na hranici, ale s takovými případy se téměř určitě nesetkáte, navíc i Cauchyho vzorce mají požadavek, aby byla funkce spojitá i na hranici.



Obrázek 17: Křivka γ a vyznačené singularity

Musíme tak pro obě singularity spočítat dílčí výsledek:

$z_0 = -1$:

$$\int_{\gamma_1} \frac{z}{(z-1)(z+1)} \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{z}{z-1}}{(z+1)^1} \mathrm{d}z = 2\pi i \left[\frac{z}{z-1}\right]_{z=-1} = 2\pi i \frac{-1}{-1-1} = \pi i.$$

$z_0 = 1$:

$$\int_{\gamma_2} \frac{z}{(z-1)(z+1)} \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{z}{z+1}}{(z-1)^1} \mathrm{d}z = 2\pi i \left[\frac{z}{z+1}\right]_{z=1} = 2\pi i \frac{1}{1+1} = \pi i.$$

Takže výsledek je

$$\int_\gamma \frac{z}{z^2-1} \mathrm{d}z = \pi i + \pi i = \underline{\underline{2\pi i}}.$$

- **Příklad:** Spočítejme $\int_\gamma \frac{z^3+4}{z^3} \mathrm{d}z$, $\gamma(t) = e^{it}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

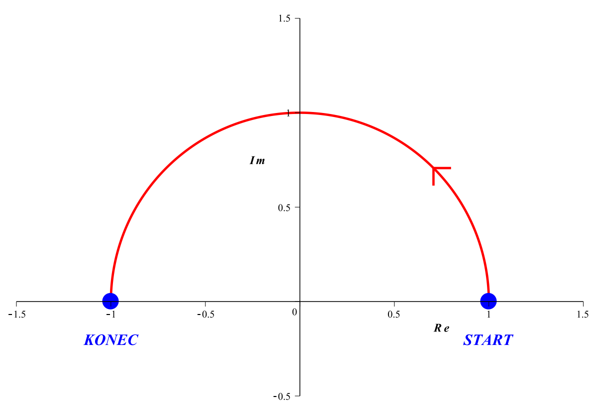
Zadaná křivka je jednotková kružnice, singularita je jen jedna, a to v počátku, použijeme opět Cauchyho vzorec:

$$\int_\gamma \frac{z^3+4}{z^3} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(3-1)!} \left[z^3+4\right]''_{z=0} = \pi i \cdot \left[3z^2\right]'_{z=0} = \pi i \left[6z\right]_{z=0} = \pi i \cdot 6 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}.$$

- **Primitivní funkce** k funkci f je taková funkce F, pro kterou platí $F' = f$. Například z^3 je primitivní funkce k $3z^2$.

- Je-li funkce f holomorfní na jednoduše souvislé oblasti, pak k ní existuje primitivní funkce F a její integrál **nezávisí v této oblasti na cestě.** Jinými slovy, vezmeme-li nějakou křivku γ v této oblasti, jejíž počáteční a koncový bod jsou $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$, pak integrál po této křivce spočteme jako
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$
Tzn., že podstatný je pro nás jen počáteční a koncový bod a integrál pak spočteme velice podobně jako „klasické“ integrály v reálném oboru. Pro podrobnější teoretický rozbor viz skripta.
Pozn.: K hledání primitivních funkcí budeme přistupovat stejně jako k neurčitým integrálům v reálném oboru! Tzn., bude fajn **oprášit si základní integrály, per partes, substituci...**

- **Příklad** Nechť $\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$. Spočítejme $\int_\gamma (2z^3 - 6z^2 + 5z + 1)\mathrm{d}z$.



Obrázek 18: Zadaná křivka, konc. bod = -1, poč. bod = 1

$$\int_\gamma (2z^3 - 6z^2 + 5z + 1)\mathrm{d}z = \left[\frac{z^4}{2} - 2z^3 + \frac{5z^2}{2} + z\right]_1^{-1} = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}.$$

Pozn.: Jelikož krajní body vyšly −1 a 1, určitě by spoustu z Vás svádělo položit −1 jako spodní mez. Jenže jako spodní mez musíme vzít počáteční bod, což je v tomto případě 1. Nezapomeňte, že jsme v komplexním oboru, tedy ve světě, kde „větší/menší“ v určitém směru pozbývá smysl.

- Závěrem si uveďme, na co si dát pozor:

- Singularity, které NELEŽÍ uvnitř γ nás nezajímají. Např.

$$\gamma(t) = 5 + e^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle : \quad \int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 0,$$

  protože singularita je v bodě $z_0 = 0$, křivka je kružnice se středem v 5 a poloměrem 1, nulu tedy neobsahuje, proto ji nebereme v potaz. Uvnitř křivky žádná singularita není, integrál je tedy dle Cauchyho věty roven 0.

- Pokud má křivka opačnou orientaci, výsledek mění znaménko! Např.

$$t \in \langle 0, 2\pi \rangle : \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad \int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i, \qquad \gamma(t) = e^{-it}, \quad \int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z = -2\pi i.$$

  Totéž platí pro integraci po neuzavřené křivce (nezávislost na cestě). Křivka s opačnou orientací má naopak počáteční a koncový bod, tedy výsledek má opačné znaménko (proto je třeba si dávat pozor, jak dosazujeme meze).

- Integrál přes sjednocení více křivek je součtem integrálů. To ale znamená, že pokud křivka obkrouží opakovaně nějaký úsek, musíme toto zohlednit! Např.

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle : \quad \int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i, \qquad t \in \langle 0, 4\pi \rangle : \quad \int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2 \cdot 2\pi i = 4\pi i.$$

8 Fourierovy řady

- Představme si, že máme nějakou (klidně reálnou) funkci f, a chceme ji na intervalu $\langle a, b\rangle$ vyjádřit pouze pomocí funkcí sin a cos o různých frekvencích. V podstatě chceme tuhle funkci co nejvěrněji „poskládat“ z kmitů. K tomuto účelu slouží **rozvoj funkce f ve Fourierovu řadu**.

- Označme $T = b - a$, tj. délka intervalu, na němž budeme rozvoj konstruovat. Dále označme úhlovou rychlost $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Fourierova řada funkce f pak vypadá následovně:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t),$$

  kde

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\cos(k\omega t)\mathrm{d}t, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\sin(k\omega t)\mathrm{d}t.$$

  Občas je lepší spočítat obecně a_k a a_0 získat dosazením $k = 0$. Pokud totiž pro $k = 0$ není s a_k problém, nemusíme a_0 počítat zvlášť. Teprve až když se ukáže, že to takto nejde, je třeba přistoupit k samostatnému výpočtu.

- Alternativně lze Fourierovu řadu spočítat v komplexním oboru, pak platí

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{i\omega kt} + c_{-k}\mathrm{e}^{-i\omega kt}, \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-i\omega kt}\mathrm{d}t.$$

  Mezi reálnými a komplexními koeficienty je jednoznačný vztah

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \qquad \Rightarrow \qquad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

  Navíc, pro reálnou funkci f jsou a_k, b_k reálné, čili platí $c_{-k} = \overline{c_k}$.

- Nekonečným součtem Fourierovy řady dostaneme za určitých okolností funkci f „skoro všude“[23] na intervalu $\langle a, b\rangle$, a mimo tento interval se obraz periodicky opakuje. Člen a_0 je dělený dvěma kvůli *normě*, tj. v jistém smyslu „velikosti“. K tomu si ještě něco řekneme později.

- Samozřejmě, že v praxi se nesčítá nekonečný počet kmitů, nýbrž se vezme **n-tý částečný součet** Fourierovy řady. Tedy nesčítáme až do ∞, ale pouze do n. Obecně by mělo platit čím větší n, tím lepší přiblížení.

[23] V tomto případě se tím myslí všude, až na konečný počet bodů intervalu. Obecně „skoro všude“ může znamenat také všude krom spočetně nekonečného množství bodů.

- A jaké jsou ty určité okolnosti, kdy skutečně dostaneme dobrou aproximaci funkce f? Naše funkce musí splňovat tzv. **Dirichletovy podmínky**:
  - Funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ konečný počet skoků ve funkční hodnotě a
  - má po částech spojitou derivaci, tj. derivace je definovaná na celém intervalu, funkce má konečný počet extrémů.

  Pak Fourierova řada **bodově konverguje** k funkci f ve „skoro všech" bodech intervalu. Je-li f navíc spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, konverguje zde řada **stejnoměrně** (tj. na celém intervalu „stejným tempem"). Co to znamená? V bodě t_0, kde je f spojitá, platí

$$f(t_0) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega t_0) + b_k \sin(k\omega t_0),$$

  tedy funkce f je v bodě spojitosti přímo součtem své Fourierovy řady. V bodě nespojitosti pak řada míří k **průměru funkčních hodnot skoku**.[24] Tzn., má-li např. funkce f v bodě 0 skok z 1 na 5, Fourierova řada v bodě 0 konverguje k hodnotě $\frac{1+5}{2} = 3$. Pozor na toto v projektech!

  Pozn.: Pokud bychom předešlou skutečnost chtěli shrnout symbolicky, platí

$$\frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega t_0) + b_k \sin(k\omega t_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to t_0^+} f(t) + \lim_{t\to t_0^-} f(t)\right).$$

  Toto se dá chápat obecně pro libovolný bod, v místě skoku to „vyrobí průměr", no a v bodě spojitosti platí

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to t_0^+} f(t) + \lim_{t\to t_0^-} f(t)\right) = \frac{1}{2} \cdot 2f(t_0) = f(t_0).$$

- **Postačující podmínkou** pro rozvoj v konvergentní Fourierovu řadu je **kvadratická integrovatelnost**, tedy funkce f lze na intervalu $\langle a, b\rangle$ rozvinout v konvergentní Fourierovu řadu, pokud platí

$$\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty.$$

  Pozn.: Ta druhá mocnina v integrálu je podstatná. Je pravdou, že i pouhá absolutní integrovatelnost k rozvoji ve Fourierovu řadu stačí, řada pak ale nemusí konvergovat. Nicméně v projektech toto takřka jistě nehrozí. **Každopádně prvním krokem v projektu by mělo být ověření kvadratické nebo alespoň absolutní integrovatelnosti zadané funkce!**

[24] Integrály mají tendenci věci interpretovat „v průměru".

Integrovatelnost můžete ověřit ručně, ale samotné **koeficienty** a_k, b_k **si nechte spočítat softwarově!** Integrály, které lezou ze zadání nejsou příliš hezké a zbytečně byste ztráceli čas. Pointou projektu je, abyste si osahali Fourierův rozvoj, ne Vás zkoušet z integrování reálných funkcí.

- **Příklad:** Nalezněme Fourierův rozvoj funkce $f(t) = t^2$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$:

Nejprve ověříme kvadratickou integrovatelnost:

$$\int_0^2 (t^2)^2 \mathrm{d}t = \int_0^2 t^4 \mathrm{d}t = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5} < \infty \qquad \checkmark$$

Můžeme tedy pokračovat. Ze zadání máme $T = 2 - 0 = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Dosazením do vzorců získáme

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 t^2\cos(k\pi t)\mathrm{d}t = \ldots = 4\frac{2k^2\pi^2\sin(k\pi)\cos(k\pi) + 2k\pi\cos(k\pi)^2 - k\pi - \sin(k\pi)\cos(k\pi)}{k^3\pi^3} \overset{k\in\mathbb{Z}}{=} \frac{4}{k^2\pi^2},$$

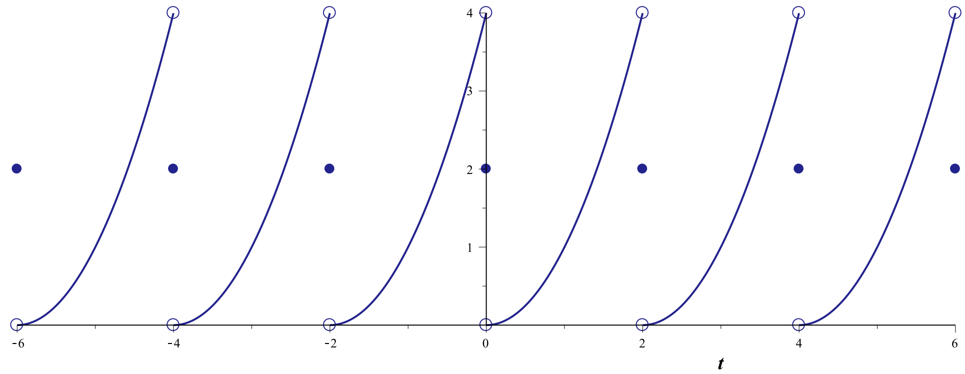
$$b_k = \frac{2}{2}\int_0^2 t^2\sin(k\pi t)\mathrm{d}t = \ldots = -4\frac{2k^2\pi^2\cos(k\pi)^2 - 2k\pi\sin(k\pi)\cos(k\pi) - k^2\pi^2 - \cos(k\pi)^2 + 1}{k^3\pi^3} \overset{k\in\mathbb{Z}}{=} -\frac{4}{k\pi}.$$

Jelikož do vztahu pro a_k nemůžeme dosadit $k = 0$, musíme a_0 spočítat zvlášť:[25]

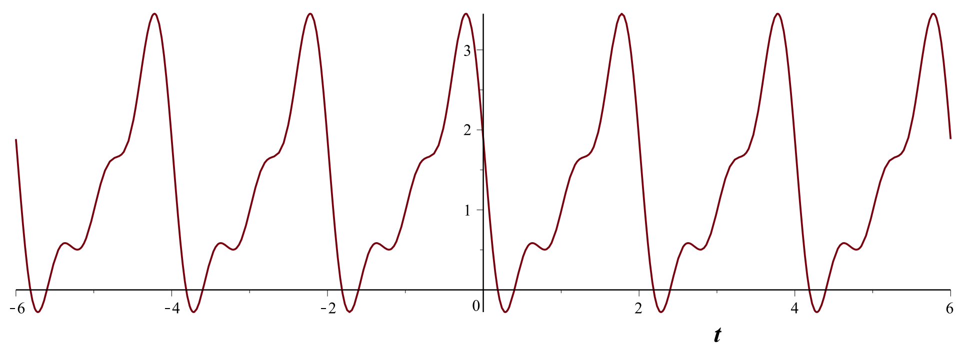
$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Koeficienty nalezeny, Fourierův rozvoj známe, můžeme si situaci nakreslit. Nejprve vykreslíme hypotetický nekonečný součet - tj. periodické prodloužení funkce f (nezapomeňme na průměry ve skocích!):

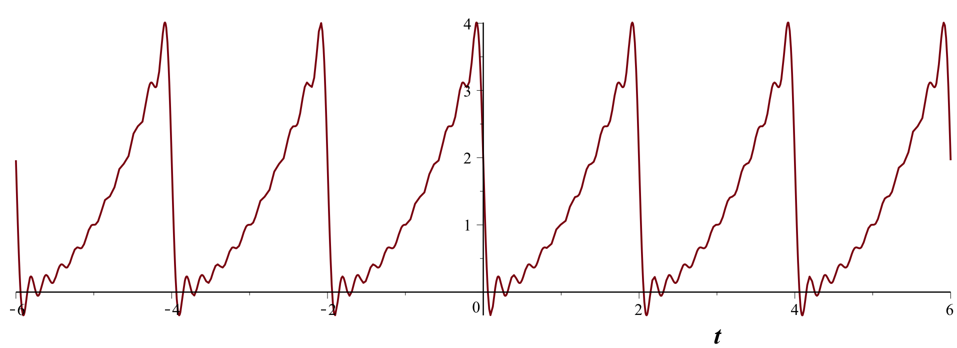
[25] Teoreticky bychom místo toho mohli spočítat limitu a_k pro $k \to 0$, ale to by bylo zbytečně pracné, navíc přímý výpočet je „korektnější“.



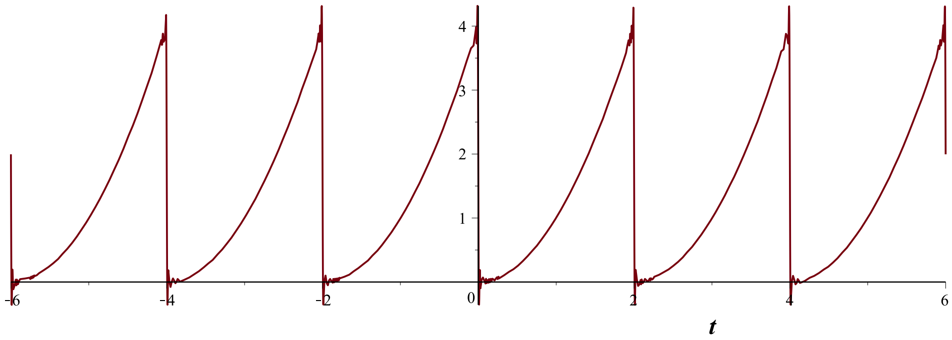
Obrázek 19: Limitní součet Fourierovy řady funkce f



Obrázek 20: Třetí částečný součet FŘ



Obrázek 21: Desátý částečný součet FŘ



Obrázek 22: Stý částečný součet FŘ

- **Sinová a kosinová řada** jsou speciální případy FŘ, sinová pro **liché funkce**, kosinová pro **sudé funkce**.

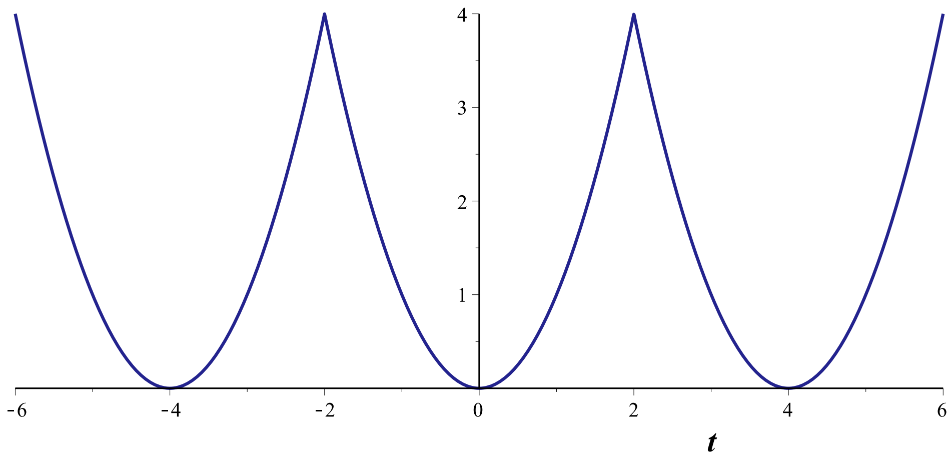
- Pro zadanou funkci, definovanou na intervalu $\langle 0, l \rangle$ se dá definovat **sudé a liché prodloužení** funkce f a to následovně:

$$f_s(t) = \begin{cases} f(t), & t \in \langle 0, l \rangle \\ f(-t) & t \in \langle -l, 0 \rangle \end{cases}, \qquad f_l(t) = \begin{cases} f(t), & t \in \langle 0, l \rangle \\ -f(-t) & t \in \langle -l, 0 \rangle. \end{cases}$$

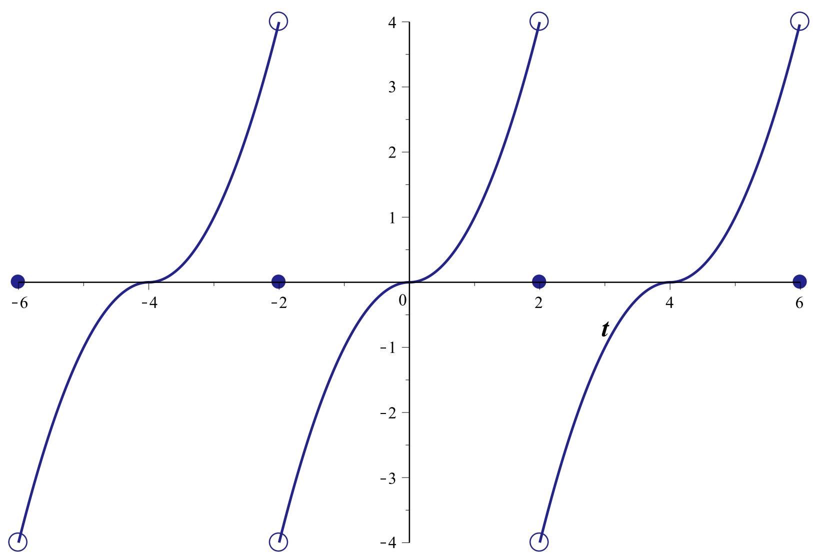
- Pro sinovou řadu pak platí $a_k = 0$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots$. Pro kosinovou zase $b_k = 0$. Koeficienty se pak spočítají jako

Kosinová: $a_0 = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l f(t) \mathrm{d}t$, $a_k = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \mathrm{d}t$, **Sinová:** $b_k = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \mathrm{d}t$.

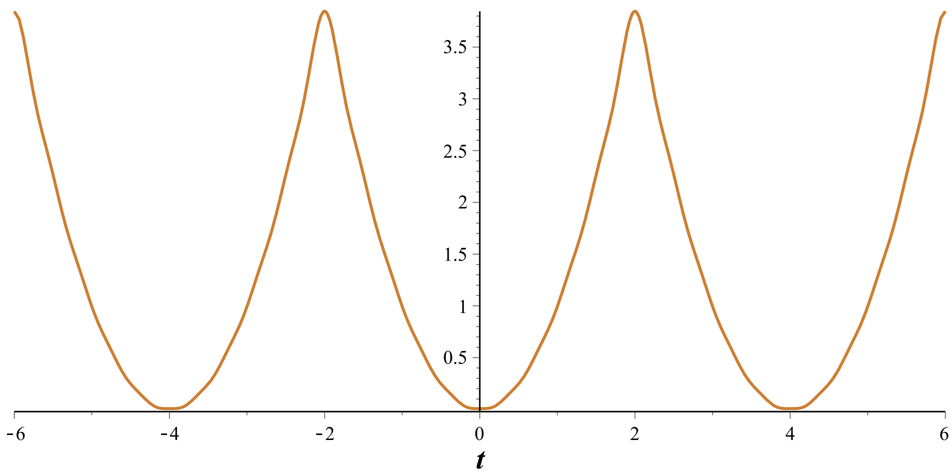
Součtem kosinové, resp. sinové řady pak je sudé, resp. liché periodické prodloužení funkce f, samozřejmě opět s výjimkou bodů nespojitosti, viz obrázky níže (pro funkci t^2 z předchozího příkladu):



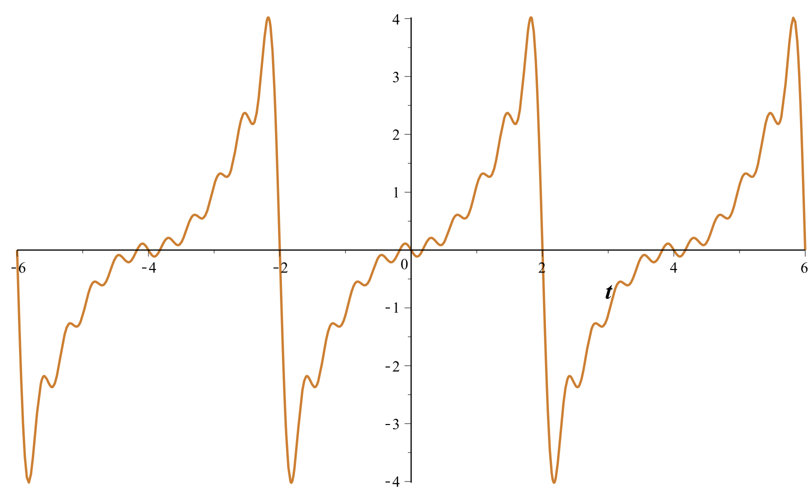
Obrázek 23: Součet kosinové řady funkce $f(t) = t^2$



Obrázek 24: Součet sinové řady funkce $f(t) = t^2$



Obrázek 25: Desátý částečný součet kosinové řady funkce $f(t) = t^2$



Obrázek 26: Desátý částečný součet sinové řady funkce $f(t) = t^2$

Všimněme si, že již desátý součet kosinové řady takřka odpovídá sudému prodloužení. To je tím, že původní funkce t^2 je sama o sobě obecně vzato sudá.

- Posledním důležitým pojmem je pro nás **amplitudové** a **fázové spektrum**. Pokud Fourierův rozvoj chápeme jako výskyt různých frekvencí ve funkci f, prvky amplitudového spektra nám říkají, jak moc jsou kmity o daných frekvencích zastoupeny, a prvky fázového spektra zase říkají, oč jsou posunuty oproti základní fázi.

- **Jednostranné** spektrum:

$$\text{Amplitudové:}\quad A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right| = |c_0|,\; A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2|c_k|,$$

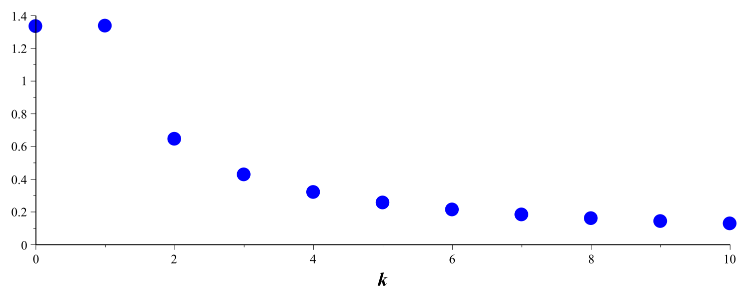
$$\text{Fázové:}\quad \varphi_k = -\arg(a_k - ib_k) = -\arg c_k,\quad k = 1, 2, \ldots$$

  Odtud můžeme definovat také třetí způsob zápisu FŘ (doposud v reálném a komplexním tvaru), a to právě v amplitudově-fázovém tvaru:

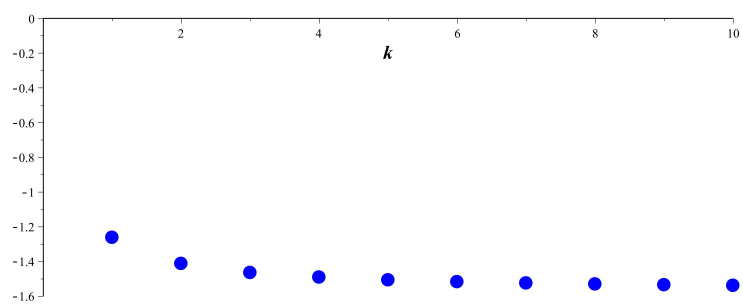
$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

- **Oboustranné** spektrum definujeme prostě jako $A_k = |c_k|$, $\varphi_k = -\arg c_k$, přičemž φ_0 není definováno (stejnosměrná složka nemá fázi). Pro reálnou funkci f platí, že její oboustranné amplitudové spektrum je sudé, a oboustranné fázové je liché.

  Opět si můžeme vykreslit spektra k našemu příkladu $f(t) = t^2$:



Obrázek 27: Jednostranné amplitudové spektrum funkce $f(t) = t^2$



Obrázek 28: Jednostranné fázové spektrum funkce $f(t) = t^2$

- **Příklad:** Určete periodu (T), úhlovou rychlost (ω) a první čtyři členy jednostranného amplitudového, resp. první tři členy fázového spektra Fourierovy řady

$$1 + \cos(2\pi t) + \sin(2\pi t) - \sqrt{3}\cos(4\pi t) + \sin(4\pi t) - 2\cos(6\pi t) + \ldots\ .$$

Nejprve si všimneme, jaký je „největší společný dělitel“ argumentů sinů (nebo kosinů, každopádně potřebujeme, aby tam byly aspoň dva). V našem případě je to o $2\pi t$, z toho okamžitě máme $\omega = 2\pi$. Jelikož $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ihned dostáváme, že $T = 1$. Nyní potřebujeme už jen vyčíst koeficienty a_k, b_k:

$$1 + 1 \cdot \cos(2\pi t) + 1 \cdot \sin(2\pi t) - \sqrt{3} \cdot \cos(4\pi t) + 1 \cdot \sin(4\pi t) - 2 \cdot \cos(6\pi t) + 0 \cdot \sin(6\pi t) + \dots\ .$$

$$\frac{a_0}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 1,\ a_2 = -\sqrt{3},\ a_3 = -2, \quad b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0$$

A ze známých vztahů $A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right|,\ A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},\ \varphi_k = -\arg(a_k - ib_k)$ dopočítáme členy spektra.

k	a_k	b_k	A_k	φ_k
0	2	–	1	–
1	1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
2	$-\sqrt{3}$	1	2	$\frac{5\pi}{6}$
3	-2	0	2	$-\pi$

Pozn.: „Kolonky“ pro b_0 a φ_0 **vždy proškrtneme**, ani jedno totiž není definováno.

- **Příklad:** Určete periodu (T), úhlovou rychlost (ω) a první čtyři členy jednostranného amplitudového, resp. první tři členy fázového spektra Fourierovy řady

$$-2 + 3\cos(6t) + 3\sqrt{3}\sin(6t) - 2\cos(9t) - 2\sin(9t) + \dots\ .$$

V argumentech cosinů máme 6 a 9, jejich největším společným dělitelem je $3t$, tedy $\omega = 3$, odtud okamžitě $T = \frac{2\pi}{3}$. Dále:

$$-2 + 0 \cdot \cos(3t) + 0 \cdot \sin(3t) + 3\cos(6t) + 3\sqrt{3}\sin(6t) - 2\cos(9t) - 2\sin(9t) + \dots$$

$$\frac{a_0}{2} = -2 \quad \Rightarrow \quad a_0 = -4, \qquad a_1 = b_1 = 0,\ a_2 = 3, b_2 = 3\sqrt{3},\ a_3 = b_3 = -2$$

A opět, ze vzorců dopočítáme spektra. Nezapomeňme, že pro 0 **není argument definován**, takže v tomto případě není definováno ani φ_1:

$$\Downarrow$$

k	a_k	b_k	A_k	φ_k
0	-4	–	2	–
1	0	0	0	–
2	3	$3\sqrt{3}$	6	$\frac{\pi}{3}$
3	-2	-2	$2\sqrt{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$

9 Fourierovy řady - jiný pohled, Gibbsův jev, aplikace

- Podívejme se ve stručnosti, z čeho vlastně pramení Fourierova řada, a proč za splnění určitých podmínek funguje. Jak jsme řekli, řada existuje a konverguje, je-li funkce kvadraticky integrovatelná, tj. $\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$. Tato skutečnost se dá symbolicky zapsat $f \in L^2(a,b)$, slovy „funkce f patří do prostoru kvadraticky integrovatelných funkcí". Tento prostor je speciální případ *Lebesgueova* prostoru $L^p(a,b)$ pro $p = 2$. Tyto prostory lze chápat jako **normované vektorové prostory o nekonečné dimenzi** a tedy přeneseně i funkce jako vektory. Slůvkem *normované* se pak má na mysli, že lze v jistém smyslu určovat velikost prvků.

- Tyto prostory jsou navíc **úplné**, to znamená, že pokud uděláme limitu prvků z tohoto prostoru, dostaneme nějaký jiný prvek z tohoto prostoru (výsledek limity neuteče někam mimo).

- Připomeňme, že **bází** prostoru rozumíme množinu, z jejíchž prvků dostaneme lineární kombinací libovolný prvek prostoru, a dimenzí prostoru volně řečeno počet prvků báze. Báze samozřejmě není jediná, její volba může leccos ovlivnit. Například množina všech reálných dvourozměrných vektorů $\mathbb{R}^2$ má bázi $e_1 = [1,0], e_2 = [0,1]$ a dimenzi 2. Jinou bází (lišící se víc, než jen násobkem) jsou třeba vektory $[2,-1], [-1,2]$.

- Prostor $L^2(a,b)$ mezi ostatními Lebesgueovými prostory vyčnívá především tím, že se jedná o **jediný takový prostor, na němž se dá definovat skalární součin**.[26] V tomto prostoru je definován pomocí integrálu:

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

  Navíc platí $(f,f) = \|f\|^2$, tj. skalární součin prvku se sebou samým dá druhou mocninu jeho „velikosti".

- Prvky f, g nazveme **ortogonální** („kolmé"), jestliže platí $(f,g) = 0$. Bázi $e_1, e_2, \ldots$ pak nazveme ortogonální, jestliže každé dva její různé prvky jsou ortogonální, tj. $i \neq j \Rightarrow (e_i, e_j) = 0$. Pokud navíc platí $\forall i : (e_i, e_i) = 1$, tj. prvky báze mají jednotkovou velikost, nazveme takovou bázi **ortonormální**.

- Proč je dobré mít ortonormální bázi? Představme si, že máme (pro jednoduchost konečnou) ortonormální bázi $e_1, e_2, \ldots, e_n$, a chceme prvek f vyjádřit v souřadnicích této báze. Jinak

[26] Tj. zobrazení, které dvěma prvkům prostoru přiřazuje číslo, a popisuje „úhel" mezi těmito prvky. Samořejmě úhel mezi dvěma funkcemi se představuje dost špatně, proto ty uvozovky (nejde o úhel mezi grafy funkcí).

řečeno, víme, že nějak prvek f z báze poskládáme, má platit

$$f = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Potřebujeme ale nalézt konstanty α_1 až α_n, tj. souřadnice. Když uvedenou rovnost **skalárně přenásobíme** libovolným prvkem e_i, dostáváme

$$(f, e_i) = (\alpha_1 e_1, e_i) + \ldots + (\alpha_i e_i, e_i) + \ldots + (\alpha_n e_n, e_i).$$

Jelikož $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou čísla, můžeme je ze skalárního součinu vytknout:

$$(f, e_i) = \alpha_1 (e_1, e_i) + \ldots + \alpha_i (e_i, e_i) + \ldots + \alpha_n (e_n, e_i).$$

A jelikož báze má být ortonormální, pak je jasné, že pro jakýkoliv index $j \neq i$ platí $(e_j, e_i) = 0$ a $(e_i, e_i) = 1$, čímž se rovnost výrazně zjednoduší:

$$(f, e_i) = \alpha_1 \underbrace{(e_1, e_i)}_{=0} + \ldots + \alpha_i \underbrace{(e_i, e_i)}_{=1} + \ldots + \alpha_n \underbrace{(e_n, e_i)}_{=0},$$

$$(f, e_i) = \alpha_i.$$

Takže jsme zjistili, že máme-li ortonormální bázi, pak souřadnice v této bázi dostaneme přímo skalárním součinem s daným bázovým prvkem! A v **úplném** prostoru s nekonečnou dimenzí, což jsme si řekli, že $L^2(a, b)$ je, to funguje naprosto stejně.

Pozn.: Byla-li by báze pouze ortogonální, nebyl by to valný problém. Šlo by to podobně, ale nalezené souřadnice by se ještě musely normovat. Pokud by však nebyla ani ortogonální, vedl by problém na soustavu s tzv. Gramovou maticí, a tato pro spoustu úloh končí jako tzv. Vandermondova matice, kterážto je velice špatně podmíněná a řešit takovou soustavu zdaleka nemusí být (zvlášť pro velká n) jednoduché či efektivní ani počítačově.

- Představme si nyní, že máme podprostor s menší dimenzí m a ortogonální bázi podprostoru $e_1, \ldots, e_m$. Dá se ukázat, že uvedený postup hledání souřadnic nám dá prvek podprostoru, který je „nejblíž“ zadanému prvku f, tzn. pokud z báze dimenze m nelze vyskládat přímo f, dá se pomocí skalárních součinů získat alespoň nejlepší možné přiblížení. Tomuto se říká *Věta o aproximaci.*

- A proč se o tom všem bavíme? Jedna z možných bází prostoru $L^2(a, b)$ je

$$1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \cos(3\omega t), \sin(3\omega t), \ldots$$

Je vcelku jednoduchým cvičením na integrování, že tato báze je ortogonální. Sice ne ortonormální, ale jak jsme si řekli, není to velký problém. Navíc platí, že všechny prvky báze mají stejnou normu, pouze **konstantní prvek báze ji má dvojnásobnou**. Nyní mějme nějakou funkci f, kterou chceme vyjádřit pomocí prvků této báze. Už víme, že to s normováním půjde pomocí skalárního součinu. Pokud tedy f vyjádříme v této bázi, dostaneme

$$f(t) = \alpha_0 \cdot 1 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \dots$$

$$\parallel \left(\text{Jiný zápis, uvážíme-li označení } \alpha_0 = \frac{a_0}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t),$$

kde příslušné koeficienty jsou dány vztahy

$$a_0 = \underbrace{\frac{2}{T}}_{\text{normování}} \underbrace{\int_a^b f(t) \cdot 1 \mathrm{d}t}_{=(f,1)}, \quad a_k = \underbrace{\frac{2}{T}}_{\text{normování}} \underbrace{\int_a^b f(t) \cos(k\omega t) \mathrm{d}t}_{=(f,\cos(k\omega t))}, \quad b_k = \underbrace{\frac{2}{T}}_{\text{normování}} \underbrace{\int_a^b f(t) \sin(k\omega t) \mathrm{d}t}_{=(f,\sin(k\omega t))}.$$

Proč jsme hodili polovinu k a_0? No právě proto, že norma konstantního bázového prvku je dvakrát větší, než ostatních, musíme tedy normovat „extra“. Sečteno a podtrženo, Fourierova řada není nic jiného, než vyjádření ve speciální bázi. Pokud $f \in L^2(a, b)$ (tedy postačující podmínka pro rozvoj), věta o aproximaci a úplnost prostoru nám garantují, že Fourierova řada existuje a konverguje.

- **Gibbsův jev:** Jestliže uděláme n–tý částečný součet FŘ, tak nám pro dost velká n vzniká v bodech nespojitosti jakýsi překmit - konkrétně o cca 9% velikosti skoku oběma směry. Tato zvláštnost se nazývá Gibbsův jev. Např. na Obrázku 22 toto můžeme pozorovat, skok má velikost 4, a překmit nad rámec skoku máme cca o 0,36. Tento výkyv se při nekonečném součtu FŘ vyhladí.

- Na závěr si shrňme některé aplikace Fourierových řad. Původním záměrem Fouriera bylo vymyslet metodu řešení rovnice difúze/vedení tepla, což je parciální diferenciální rovnice. Fourier byl úspěšný, nicméně dnes se již pro řešení takovýchto úloh používají v praxi především numerické metody, algoritmizované na (super)počítači. Později se však trigonometrická FŘ dočkala úspěchu především díky analýze signálů, v prvních AD/DA převodnících, dokonce při součtech některých jiných nekonečných řad a podobně. Dnes jsou nejužitečnější především algoritmy, jež jsou právě z FŘ odvozené, zejména FFT[27], užívaná právě při převodu AD/DA, při kompresi, ať už v rámci přenosu televizního či jiného signálu, nebo JPEG, MP3 apod. Podobně odvozená DCT (diskrétní kosinová transformace) se užívá mimo jiné při digitálním zpracování obrazu. S nástroji funkcionální analýzy bylo později možné

[27] Fast Fourier Transform = Rychlá Fourierova Transformace

ukázat, že Fourierovy výsledky lze zobecnit (tak jak jsme si na začátku této sekce naznačili) pro libovolnou ortogonální bázi, což vyústilo v celou novou rodinu aproximačních metod, metod numerické integrace či jiných poměrně důležitých technik.

10 Mocninné řady

- **Geometrickou řadou** rozumíme řadu
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$
Jestliže $|z| < 1$, pak má řada konečný součet daný vztahem
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$
Samozřejmě se jedná o limitní součet. Zároveň připomeňme, že pokud je řeč o limitě posloupnosti, což v následujících řádcích bude, limita se značí pouze lim a automaticky se tím rozumí limita v nekonečnu (neplést s limitou funkce, která byla např. u definice derivace).

- Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je bod v komplexní rovině. Nekonečnou řadu
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$
nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě** z_0.

- Pokud takováto řada konverguje, je nasnadě (z je proměnná), že tam kde konverguje, je to k nějaké funkci $f(z)$.

- Otázkou je, kde v komplexní rovině řada konverguje. Přímo ve středu řady je to prosté, všechny krom nultého členu se vynulují a součtem řady v jejím středu je koeficient a_0. Našla by se i nějaká rozumnější, než jednobodová množina? Obecně to bývá na nějakém okolí bodu z_0, největší možný poloměr tohoto okolí, kde je ještě mocninná řada konvergentní, nazýváme **poloměrem konvergence**, a právě celé toto okolí pak **oborem (popř. kruhem) konvergence** mocninné řady.

- Poloměr konvergence R můžeme dostat pomocí tzv. odmocninového nebo podílového kritéria[28] pro koeficienty řady, konkrétně
$$R = \frac{1}{\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|},$$
případně
$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}},$$
pokud daná limita existuje.[29] Okolí $\mathcal{U}(z_0, R)$ je pak právě oborem konvergence. Je-li výhodnější použít pro výpočet poloměru podílové nebo odmocninové kritérium je většinou jasné z kontextu, často to jde i oběma způsoby. Přesněji řečeno, odmocninové kritérium je v jistém

[28] Jedny z kritérií pro konvergenci součtu řad.

[29] Existují i tvrzení, obsahující $\limsup$, která existuje vždy. Pokud $R \to 0$, tak nutně zprava, a tak jednoduše můžeme tento zápis ponechat a klást $R = 0$, pokud limita vyjde ∞ a naopak.

smyslu silnější, než podílové – existují řady, kde odmocninové výsledek dá a podílové nikoliv. Opačně to neplatí, dá-li výsledek podílové, nutně jej dá i odmocninové a jistě bude stejný. To však berme pouze jako perličku, většinou jednoduše postupujeme tak, že když se v koeficientech vyskytuje „něco na n-tou“, volíme odmocninové, tam, kde je nějaký výraz, u nějž se dobře dá užít podílu (třeba faktoriál), tak spíše podílové, nicméně je to v zásadě otázka vkusu.

- **Pozn.:** Měli bychom mít na paměti jedno ze základních pravidel z prváku, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Pro zjednodušení života si uveďme následující pozorování:

Nechť $P_k(n)$ je **libovolný** polynom stupně $k \in \mathbb{N}$. Pak platí $\lim \sqrt[n]{P_k(n)} = 1$.

Dokázat, že toto platí lze (mimo jiných) dvěma způsoby. Buďto využijeme zmíněného faktu, že pokud výsledek existuje pomocí podílového kritéria, musí stejný dát i odmocninové a natvrdo s využitím binomického rozvoje spočítat limitu racionální posloupnosti s obecnou mocninou. No a nebo si ukážeme jednodušší fintu:

Pro dost velká n musí platit

$$n^{k-1} \le P_k(n) \le n^{k+1}.$$

Jinými slovy

$$\lim n^{k-1} \le \lim P_k(n) \le \lim n^{k+1},$$

$$\lim \sqrt[n]{n^{k-1}} \le \lim \sqrt[n]{P_k(n)} \le \lim \sqrt[n]{n^{k+1}},$$

$$\lim(\sqrt[n]{n})^{k-1} \le \lim \sqrt[n]{P_k(n)} \le \lim(\sqrt[n]{n})^{k+1},$$

a protože k je pevně dané přirozené číslo, tak

$$1^{k-1} \le \lim \sqrt[n]{P_k(n)} \le 1^{k+1},$$

$$1 \le \lim \sqrt[n]{P_k(n)} \le 1.$$

Čili není jiná možnost, než že platí $\lim \sqrt[n]{P_k(n)} = 1$.

Toto pozorování Vám možná dost výrazně usnadní život, pokud byste např. narazili na situaci $a_n = \frac{n^4-n^2+1}{n^3+7n^2+n}$. Pokud nevěříte, schválně si to zkuste nejdřív podílovým kritériem, a pak odmocninovým s výše uvedeným pozorováním.

- **Příklad:** Určete obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^3+1)(z-1)^n}{2^n n}$.

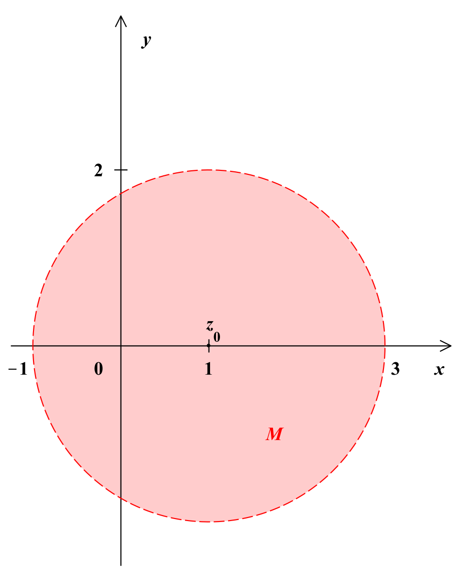
První, čím začneme, je určení středu řady. Toto je velmi jednoduché, zkrátka se podíváme, co odečítáme od z v té závorce, která je mocněna přes sumační index, podobně, jako když máme množinu danou podmínkou s absolutní hodnotou nebo u Cauchyho vzorců. Pokud by tam taková závorka nebyla, tak se obecně vzato nejspíš ani nejedená o mocninnou řadu. [30] V tomto případě máme $(z-1)^n$, tedy $z_0 = 1$.

Nyní potřebujeme určit poloměr konvergence. Ze zadání vidíme, že $a_n = \frac{n^3+1}{2^n n}$. Připomeňme, že **poloměr počítáme jen z koeficientů řady, tedy bez** z! V tomto případě můžeme spočítat poloměr oběma způsoby. Podílově:

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{(n+1)^3+1}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{n^3+1}{2^n n}} = \lim \frac{\frac{n^3+3n^2+3n+2}{2n+2}}{\frac{n^3+1}{n}} = \lim \frac{n(n^3+3n^2+3n+2)}{(2n+2)(n^3+1)} =$$

$$= \lim \frac{n^4+3n^3+3n^2+2n}{2n^4+2n^3+2n+2} = \lim \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}+\frac{2}{n^4}} = \frac{1+0+0+0}{2+0+0+0} = \frac{1}{2},$$

a jelikož R je převrácená hodnota spočítané limity, tak máme $\underline{\underline{R=2}}$. Nalezený obor konvergence je tedy $\mathcal{U}(z_0, R) = \underline{\underline{\mathcal{U}(1,2)}}$.



Obrázek 29: Obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)(z-1)^n}{2^n n}$

[30] V jistých speciálních případech by se to dalo přepsat do tvaru mocninné řady, ale to momentálně není náš cíl zkoumání.

Pro kontrolu/ukázku si zkusme spočítat poloměr i druhým způsobem (limita by samozřejmě měla vyjít stejně jako u předchozího způsobu):

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^3+1}{2^n n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n^3+1}}{\sqrt[n]{2^n n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n^3+1}}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Všimněme si, že s využitím pozorování o n-té odmocnině polynomu se obecně odmocninové kritérium ukazuje jako velmi účinné. Podílové je nutností víceméně pouze v případě faktoriálu, jak bylo naznačeno dříve.

- **Příklad:** Určete obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{n!}$.

Vidíme, že $z_0 = 1 - i$ (pozor na znaménka) a $a_n = \frac{1}{n!}$. Jelikož n-tá odmocnina a faktoriál se početně příliš nekamarádí [31], využijeme podílové kritérium:

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \infty,$$

takže oborem konvergence je $\underline{\underline{\mathcal{U}(1-i,\infty) = \mathbb{C}}}$.

- Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ má obor konvergence $\mathcal{U}(z_0, R)$, pak je jejím součtem funkce $f(z)$, která je na tomto oboru **holomorfní**. Navíc, na tomto okolí lze libovolnou derivaci takovéto funkce spočítat jako derivaci mocninné řady po členech, tj.

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(z-z_0)^n\right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)a_n(z-z_0)^{n-p}.$$

Obdobné tvrzení platí i pro integrování, jestliže integrační křivka leží celá v oboru konvergence, respektive pro primitivní funkci.

- Uvedeného faktu se dá využít při určování součtu nekonečných sum:

Příklad: Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Dále určete, čemu je rovno $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n}$.

Vidíme, že zadaná mocninná řada má střed v bodě $z_0 = 0$, odmocninovým kritériem lehce spočítáme, že

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1,$$

čili oborem konvergence zadané řady je $\mathcal{U}(0,1)$. Označíme-li si na tomto okolí součet řady jako funkci f, tak můžeme použít předchozí bod, abychom se „zbavili“ n ve jmenovateli.

[31] Ostatně limity takového typu se často počítají právě využitím souvislosti limity n-té odmocniny s limitou podílu sousedních členů.

Obecně se při tomto způsobu sčítání řad snažíme pomocí derivování či integrování odstranit vše krom $(z - z_0)^n$, a případně nějakých konstantních členů. Každopádně:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overset{\text{Geom. řada}}{=} \frac{1}{1-z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{1-z} \qquad \Rightarrow \qquad f(z) = \int \frac{1}{1-z} \mathrm{d}z = -\ln(1-z) + C$$

Konstantu C pak určíme ze středu řady:

$$0 = f(0) = -\ln(1-0) + C = C,$$

takže $C = 0$ a součet mocninné řady v kruhu konvergence je $-\ln(1-z)$.

Všimněme si dále, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^n}{n} = f\left(\frac{2}{3}\right), \quad z = \frac{2}{3} \in \mathcal{U}(0,1),$$

z čehož dosazením za z do nalezeného obecného předpisu dostáváme součet řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n} = -\ln\left(1 - \frac{2}{3}\right) = -\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\ln 3 \approx 1.1}}$$

- **Příklad:** Určete součet řady $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2 + 3n - 4)z^n$. Dále určete, čemu je rovno $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n-4}{2^n}$.

Oborem konvergence je na první pohled $\mathcal{U}(0,1)$. Vidíme, že teď budeme naopak muset výrazy s n dělit, abychom se zbavili koeficientu $n^2 + 3n - 4$, budeme tedy řadu člen za členem integrovat (po patřičné úpravě) a pak zpětně derivovat:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n-4)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n-1)z^n = z^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n-1)z^{n-2}}_{ozn.\ g(z)},$$

$$G(z) = \int g(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n-1)\frac{z^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+4)z^{n-1} = \frac{1}{z^4}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)z^{n+3}}_{ozn.\ h(z)},$$

$$H(z) = \int h(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}(n+4)\frac{z^{n+4}}{n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+4} \stackrel{GP}{=} \frac{z^4}{1-z},$$

$$h(z) = H'(z) = \left(\frac{z^4}{1-z}\right)' = \frac{4z^3(1-z)+z^4}{(1-z)^2} = \frac{4z^3}{1-z} + \frac{z^4}{(1-z)^2},$$

$$G(z) = \frac{1}{z^4}h(z) = \frac{4}{z(1-z)} + \frac{1}{(1-z)^2}, \quad g(z) = G'(z) = -\frac{4(1-2z)}{z^2(1-z)^2} - \frac{2}{(1-z)^3}(-1),$$

$$f(z) = z^2 g(z) = \frac{8z-4}{(1-z)^2} + \frac{2z^2}{(1-z)^3} = \frac{(8z-4)(1-z)+2z^2}{(1-z)^3} = \underline{\underline{\frac{6z^2-12z+4}{(z-1)^3}}}$$

Pro vyčíslení konkrétní číselné řady stačí dosadit za z:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3n-4}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{6}{4}-6+4}{-\frac{1}{8}} = -12+48-32 = \underline{\underline{4}}$$

- **Zajímavost/příklad k procvičení:** Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Názorněji pro ty, jež ani po pár letech na technice nejsou fanoušky symbolu „suma“:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots = \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\frac{6}{64}+\frac{7}{128}+\ldots$$

Zlomky na pravé straně nejsou všechny v základním tvaru (tj. zkrácené) pro lepší názornost.

Kolik je to konkrétně neprozradíme, aby zájemci, kteří si chtěli výše uvedenou rovnost zkusit ověřit, nehartusili, že jsem jim prozradil výsledek. Na druhou stranu, pokud by to tak někdo bral, tak by se možná mohl trochu zamyslet, neboť přinejmenším u první řady výsledek jistě znáte buď už ze střední školy, nebo ze vtipu s nekonečnem matematiků na pivu, případně ze cvičení a jiných obskurních zdrojů.

11 Taylorovy řady

- Taylorova řada je speciálním případem mocninné řady. V minulé části jsme si řekli, že mocninná řada v kruhu konvergence konverguje k nějaké holomorfní funkci. Nyní nám však půjde o opačnou situaci, budeme mít na nějakém okolí $\mathcal{U}(z_0, R)$ funkci, která je holomorfní. Pak víme, že existuje právě jediná mocninná řada, pro kterou platí

  $$z \in \mathcal{U}(z_0, R): \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

  a navíc v tu chvíli víme, že pro koeficienty a_n platí

  $$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z, \qquad \gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ 0 < r < R.$$

  Takovouto mocninnou řadu označujeme jako **Taylorovu řadu funkce f v bodě z_0.**

- Dá se ukázat, že poloměr konvergence Taylorovy řady je jednoduše vzdálenost z_0 od nejbližší singularity zadané funkce f. Pokud funkce singularity nemá, pak je $R = \infty$.

- Některé holomorfní funkce mají naprosto stejný Taylorův rozvoj jako v reálném oboru. Uveďme si několik důležitých řad se středem v 0:

  $$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

  Pozn.: Stejné předpisy platí i v reálném oboru. A právě z nich lze dokázat, proč vlastně platí $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ (viz dříve Poznámka k exponenciálnímu tvaru komplexních čísel). Pokud si uvědomíme, že cos obsahuje pouze sudé členy a sin pouze liché, v obou případech se střídají znaménka, a za z do Taylorova rozvoje dosadíme $i\varphi$, dostaneme

  $$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \dots \\ &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos\varphi + i \sin\varphi. \end{aligned}$$

- Ačkoliv koeficienty Taylorovy řady se dají počítat derivováním (potažmo integrováním), je často obtížné takto určit obecný koeficient a_n. Při určování Taylorovy řady budeme často používat trik s geometrickou řadou, tj. pokusíme se ve jmenovateli vyrobit $1-$„něco se $z - z_0$“

tak, aby to „něco“ bylo v absolutní hodnotě menší než 1 a tedy se jednalo o kvocient geometrické řady.

Příklad: Nalezněte Taylorův rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{4-z}$ v bodě $z_0 = 0$.

Nejprve určíme, na jakém okolí bodu z_0 je zadaná funkce holomorfní. Singularita je zjevně v bodě 4, takže funkce je holomorfní na $\mathcal{U}(0,4)$. Nyní upravme funkci tak, jak je naznačeno výše:

$$\frac{1}{4-z} = \frac{1}{4\left(1-\frac{z}{4}\right)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{4}},$$

jelikož na $\mathcal{U}(0,4)$ platí, že $\left|\frac{z}{4}\right| < 1$, lze druhý zlomek interpretovat jako součet geometrické řady s kvocientem $\frac{z}{4}$, s využitím čehož po pár úpravách dostaneme finální Taylorovu řadu:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}}}\ .$$

- Ne vždy to jde však takto přímo. Krom toho, že si občas je třeba přičtením a odečtením vyrobit $z - z_0$, tak především nemusíme mít zlomek ve tvaru, kdy můžeme tyto čachry provádět - někdy je třeba nejprve složitější zlomek rozložit na parciální zlomky:

Příklad Nalezněte Taylorův rozvoj funkce $f(z) = -\frac{2}{z^2-4z+3}$ v bodě $z_0 = -1$.

Jelikož platí $z^2 - 4z + 3 = (z-1)(z-3)$, vidíme, že nejbližší singularita je od bodu -1 vzdálena o 2, náš obor konvergence je tedy $\mathcal{U}(-1,2)$. Jak již bylo naznačeno, zlomek potřebujeme rozložit:

$$-\frac{2}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3}$$

$$-2 = A(z-3) + B(z-1)$$

$$z = 1: \quad -2 = A(1-3) \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$z = 3: \quad -2 = B(3-1) \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$\frac{4}{z^2-4z+3} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3}.$$

Podívejme se na první zlomek, připomeňme, že potřebujeme do pozice kvocientu nějak dostat $z - z_0$, v našem případě $z + 1$:

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{1-(z+1-1)} = -\frac{1}{2-(z+1)} = -\frac{1}{2\left(1-\frac{z+1}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n .$$

A druhý zlomek podobně:

$$-\frac{1}{z-3} = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{4-(z+1)} = \frac{1}{4\left(1-\frac{z+1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{4}\right)^n ,$$

takže

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{4}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{4^{n+1}} =$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^{n+1}}{4^{n+1}}(z+1)^n}} .$$

- Taylorovy řady mají obrovský význam v teorii, některé jejich aplikace můžete nalézt ve skriptech, jmenujme za všechny jednu - základní větu algebry, tj. větu, která nám říká, že každý polynom stupně n má spolu s násobností právě n komplexních kořenů. Dalšími aplikacemi Taylorových řad jsou pak především aproximace funkcí a studium chyb aproximací, možnost přibližného výpočtu integrálů, implementace základních funkcí na čipech a další.

12 Laurentovy řady, klasifikace singularit

- **Laurentovou řadou** funkce f se středem z_0 rozumíme nekonečnou řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

a koeficienty a_n se pro „vhodnou" uzavřenou křivku γ spočítají jako

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

Možná si teď říkáte, že máte déjà vu, vždyť je to to samé jako Taylorovy řady! No, ne tak docela. Především, sumační index neběhá jen od 0, ale od $-\infty$. K čemu je to dobré? U Taylorovy řady jsme mohli holomorfní funkci aproximovat jen na kruhu konvergence, dál se jít nedalo. Rozšíření, které nám poskytuje Laurentův rozvoj, nám umožní funkci aproximovat sice jen tam, kde je holomorfní, ale i za prvním problémovým bodem. Pak se ovšem nebude hledat rozvoj na kruhu, ale na mezikruží. Toto si vysvětleme trošku podrobněji:

- **Regulární částí Laurentovy řady** rozumíme pouze její mocninnou část, tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Zbývající členy sumy, tj. řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

nazýváme **hlavní částí Laurentovy řady**.

- Je jasné, že regulární část má svůj obor konvergence s nějakým poloměrem R, je to mocninná řada. Symbolicky je tento obor $\mathcal{U}(z_0, R)$. Hlavní část je jakoby „převrácená" mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^n$, která má dejme tomu poloměr konvergence ρ.

  Je také jasné, že když převrácená hlavní část má poloměr konvergence ρ a tedy konverguje všude, kde je $|z-z_0| < \rho$, tak sama hlavní část bude konvergovat tam, kde $|z-z_0| > \frac{1}{\rho} \overset{ozn.}{=} r$[32], to jest konverguje všude mimo množinu $\overline{\mathcal{U}(z_0,r)}$, symbolicky $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{U}(z_0,r)}$. Tím pruhem nad se myslí uzávěr, tj. množina i se svou hranicí.

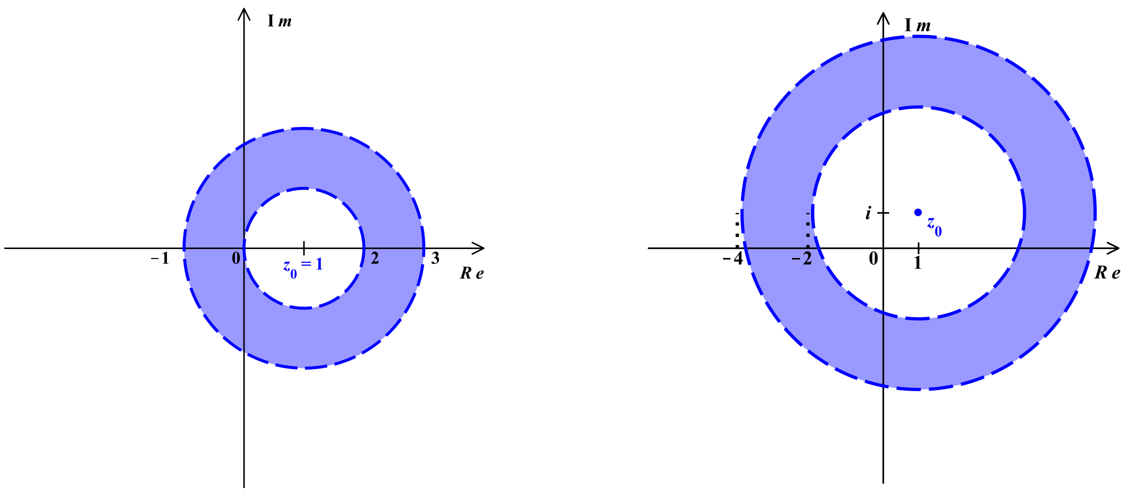
  Aby konvergovala řada jako celek, musí konvergovat obě její části, celkově tak řada konverguje pouze tam, kde konvergují obě naráz, tedy na průniku množin $\mathcal{U}(z_0,R)$ a $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{U}(z_0,r)}$.

  Jinými slovy, **Laurentova řada tedy konverguje tam, kde platí** $|z-z_0| > r$ **a zároveň** $|z-z_0| < R$**, což je pro** $r < R$ **právě mezikruží.** Pro $r = R$ je to kružnice (tedy pouze křivka), a u té o konvergenci stejně nic moc nevíme. No a pro $r > R$ řada nekonverguje nikde, zkrátka proto, že průnik množin $\mathcal{U}(z_0,R)$ a $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{U}(z_0,r)}$ je prázdný.

[32] Kdyby tohle nebylo jasné, tak si to uvědomte na konkrétním příkladě: $x < 5 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} > \frac{1}{5}$

- **Mezikruží** se středem v bodě z_0, vnitřním poloměrem r a vnějším poloměrem R budeme značit $P(z_0, r, R)$. Platí

$$P(z_0, r, R) = \mathcal{U}(z_0, R) \cap (\mathbb{C} \smallsetminus \overline{\mathcal{U}(z_0, r)}) = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z - z_0| < R\}.$$



(a) Mezikruží $P(1, 1, 2)$

(b) Mezikruží $P(1 + i, 3, 5)$

Do mezikruží s nulovým vnitřním poloměrem, tj. $P(z_0, 0, R)$, se nepočítá samotný střed z_0. Na rozdíl od Taylorova rozvoje **lze sestavit Laurentovu řadu dokonce se středem přímo v singularitě**.

- Máme-li tedy určit Laurentův rozvoj funkce f, musíme nejprve vědět, na jakém mezikruží ho chceme dělat, na různých oborech konvergence totiž logicky dostaneme různé Laurentovy rozvoje. Většinou bude mít zadaná funkce singularity dané dělením nulou. A u Taylorovy řady jsme si řekli, že oborem konvergence je zkrátka kruh od středu po nejbližší singularitu. U Laurentových řad můžeme jít dál, dalším oborem konvergence je totiž mezikruží od nejbližší po druhou nejbližší singularitu, dalším bude mezikruží mezi dalšími singularitami, a tak dále, až po nekonečné mezikruží od nejvzdálenější singularity do nekonečna. Symbolicky: Má-li funkce f singularity $z_1, \ldots, z_n$ (seřazené od nejbližší po nejvzdálenější), pak za předpokladu, že žádné dvě singularity nejsou od z_0 stejně daleko je všech možných oborů konvergence $n+1$ a jsou to

$$P(z_0, 0, |z_1 - z_0|), P(z_0, |z_1 - z_0|, |z_2 - z_0|), \ldots, P(z_0, |z_{n-1} - z_0|, |z_n - z_0|), P(z_0, |z_n - z_0|, \infty).$$

Např. máme-li funkci $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-5)}$, tak vidíme, že singularity jsou 2 a 5. Budeme-li chtít udělat Laurentův rozvoj této funkce se středem $z_0 = 0$, tak je to možné provést na mezikružích $P(0, 0, 2)$, $P(0, 2, 5)$ a $P(0, 5, \infty)$.

Pozn.: Hned první mezikruží $P(z_0, 0, |z_1 - z_0|)$ lze v podstatě, až na samotný bod z_0, ztotožnit s $\mathcal{U}(z_0, |z_1 - z_0|)$. Hledáme-li Laurentův rozvoj na tomto „nejvnitřnějším“ mezikruží a zároveň z_0 není singularitou určitého typu (k tomu později), měli bychom dostat přímo Taylorův rozvoj. Ostatně Laurentovu řadu budeme sestavovat naprosto stejným způsobem, jako jsme sestavovali Taylorovu, až na jednu maličkost, na kterou bude třeba si dávat pozor:

- **Příklad:** Nalezněme Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z-5}$ na všech mezikružích se středem v bodě $z_0 = 2$, na nichž je f holomorfní.

Nejprve si určíme tato mezikruží. Vidíme, že singularitu máme jedinou, a to v bodě 5, kterýžto je od zadaného středu vzdálen o 3. Myslitelná mezikruží jsou tedy dvě, a to $P(2, 0, 3)$ a $P(2, 3, \infty)$.

(a) $P(2, 0, 3)$:

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{(z-2)-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-2}{3}\right)} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-2}{3}\right)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}}} \,.$$

Jak vidno, na prvním mezikruží jsme dostali skutečně pouhý Taylorův rozvoj. Změny přijdou až s druhým mezikružím:

(b) $P(2, 3, \infty)$:

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{(z-2)-3}$$

Začátek je stejný, potřebujeme si vyrobit z mínus střed. Nicméně, teď nebudeme vytýkat -3, ale naopak $(z-2)$. Proč? Aby vzniklý člen měl velikost menší než 1 a tudíž aby bylo lze pak zlomek přepsat pomocí geometrické řady. Tím, že jsme na $P(2, 3, \infty)$, tak bychom při vytknutí -3 dostali kvocient $\left(\frac{z-2}{3}\right)$, který by se nacházel na mezikruží $P(0, 1, \infty)$, tedy VNĚ jednotkového kruhu, tedy by měl velikost větší, než 1. Na druhou stranu, když vyrobíme převrácenou hodnotu, ta bude mít naopak velikost menší, než 1.

Pro jednoduchost si můžeme pamatovat, že pokud „to, co nám vyplave navíc oproti $(z - z_0)$“ (bez ohledu na znaménko) je **MENŠÍ, NEŽ VNĚJŠÍ POLOMĚR MEZIKRUŽÍ, NA NĚMŽ JSME**, pak vytýkáme $(z - z_0)$, v opačném případě můžeme vytknout číslo, stejně jako u Taylorovy řady. V našem případě zjevně $3 < \infty$ a tedy vytýkáme $(z-2)$:

$$\frac{1}{(z-2)-3} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{z-2}\right)} = \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z-2}\right)^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(z-2)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}}} \,.$$

Pozn.: Jak vidíme, na „nejvnějším“ mezikruží jsme dostali pro změnu pouze hlavní část Laurentovy řady. Obě části, jak regulární, tak hlavní, bychom dostali na některém z „prostředních“

mezikruží, k tomu bychom ovšem potřebovali více singularit. Z některých zlomků bychom pak vytýkali číslo a z některých z mínus střed, podle toho, kde se nacházíme. Viz cvičení.

- Pořád mluvíme o pojmu singularita. Formálně jsme měli na mysli **izolovanou singularitu**, která se dá definovat jako takový bod z_0, v němž není funkce f holomorfní, ale existuje nějaké jeho okolí, na němž f holomorfní je. Nicméně, pojem singularity lze dále rozvést - jaké jsou druhy singularit a jak se projevují?

  Laurentovu řadu lze díky jejímu zavedení najít i se středem přímo v singularitě. A právě podle toho, co je ta singularita zač, pak výsledná LŘ vypadá.

- Mějme funkci f a její Laurentovu řadu se středem v singularitě z_0. Rozlišujeme 3 typy singularit:
  - ◇ Je-li hlavní část LŘ nulová, tj. $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{-n} = 0$, nazveme z_0 **odstranitelnou singularitou funkce** f,
  - ◇ pokud je nenulový maximálně k-tý koeficient hlavní části, tj. $\forall n > k: \ a_{-n} = 0$, nazýváme z_0 **pólem násobnosti** k **funkce** f,
  - ◇ má-li hlavní část nekonečno nenulových koeficientů, pak nazýváme z_0 **podstatnou singularitou funkce** f.

- typy singularity lze poznat i pomocí $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$. Pokud je výsledek konečný, je z_0 odstranitelnou singularitou. Pokud limita neexistuje, jde o podstatnou singularitu. No a pokud je limita nekonečno, jedná se o pól, a navíc pokud $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ je konečná a NENULOVÁ, je to pól násobnosti k.

- Většina singularit, na které narazíme, jsou póly. Jejich násobnost je pak daná prostě mocninou, s jakou se ve funkci problémový výraz vyskytuje.

Např.: Funkce $f(z) = \frac{1}{z^4(z-1)^2(z+1)}$ má tři póly: 0,1,-1 s tím, že 0 je 4-násobný pól, 1 je 2-násobný pól a -1 je jednoduchý pól.

- ALE POZOR! Aby to bylo takto jednoduché, musíme mít funkci, kde jsou ve zlomku polynomy a zlomek je v základním tvaru.

Varovné příklady:

- ◇ $f(z) = \frac{z-1}{z^2-1}$ se dá zapsat jako $f(z) = \frac{z-1}{(z-1)(z+1)}$. Jenže $z - 1$ se dá zkrátit, tudíž máme $f(z) = \frac{1}{z+1}$, a 1 tedy NENÍ jednoduchý pól, ale odstranitelná singularita (všimněme si, že jsme ji úpravou funkce skutečně „odstranili“).

◇ $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ nemá v 0 pól násobnosti 2, ale pouze 1, protože

$$\lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

- **Př.:** $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ má v 0 podstatnou singularitu, neboť její LŘ dostaneme pomocí Taylorovy řady funkce e^z jako

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!},$$

takže vidíme, že hlavní část má nekonečně mnoho nenulových koeficientů.

- **Laurentovou řadou se středem v** ∞ rozumíme řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Všimněme si, že se jedná vlastně o totéž, jako o LŘ se středem v 0, pouze budou naopak hlavní a regulární část.

Všechny ostatní pojmy, včetně toho, zda je ∞ izolovanou singularitou, a případně jakou, je analogické předchozímu výkladu. Jediný rozdíl je, že pokud budeme chtít určovat násobnost pólu limitou, nebudeme původní funkci násobit z^k, ale naopak DĚLIT.

Nekonečno je singularitou funkce vždy, pokud je funkce f holomorfní na nějakém (alespoň nějakém, tj. libovolně malém) okolí ∞. Jinak řečeno, v našich příkladech tomu tak bude vždy. Důvod, proč se zabýváme řadou se středem v nekonečnu je mj. dán faktem, že příště se podíváme na rezidua, a v určitých případech se nám schopnost určit povahu ∞ vzhledem k f bude hodit.

13 Rezidua, výpočet integrálů pomocí reziduí, zpětná Laplaceova transformace

- Volně navážeme tam, kde jsme minule skončili - mějme funkci f, nějakou její singularitu $z_0 \in \mathbb{C}$ a Laurentovu řadu funkce f na „nejvnitřnějším“ mezikruží, tedy na prstencovém okolí bodu z_0 o nějakém poloměru R. Symbolicky

$$\forall z \in P(z_0, 0, R): \; f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

  Pak koeficient a_{-1} tohoto rozvoje nazýváme **reziduem funkce** f **v bodě** z_0 a značíme $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$.

- Pokud máme Laurentovu řadu se středem v ∞, reziduem v nekonečnu rozumíme $-a_1$.

- Proč reziduum? Odpovězme si na tuto otázku pro konečné z_0, pro nekonečné je to analogicky. Slovo *reziduum* znamená „zbytek“, a právě koeficient a_{-1} souvisí s integrálem samotné funkce f. Proč? Pokud bychom $f(z)$ přepsali pomocí Laurentovy řady a řadu člen po členu integrovali, zjistili bychom, že pro všechny členy sumy s indexem ≥ 0 bychom měli holomorfní integrandy a vše by se dle Cauchyho věty vynulovalo, pro indexy menší než -1 by zase integrály vyšly nulové, protože čitatele by byly konstantní (pouze koeficienty a_n) a Cauchyho vzorce by čitatele derivovaly, tedy by se opět vše vynulovalo: Zůstává pouze člen s indexem -1:

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \mathrm{d}z = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma a_n (z-z_0)^n \mathrm{d}z}_{\text{=0 (Cauchyho věta)}} + \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z-z_0}\mathrm{d}z + \sum_{n=2}^{\infty} \int_\gamma \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{Cauchyho vzorce}}{=} 2\pi i \cdot a_{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\pi i}{(n-1)!} \underbrace{[a_{-n}]_{z=z_0}^{(n-1)}}_{=0} = 2\pi i \cdot a_{-1}.$$

- Připomeňme si, pro konečné z_0 a uzavřenou křivku γ, ležící uvnitř $P(z_0, 0, R)$, platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

  Vidíme, že pro $n = -1$ dostáváme integrál pouze z $f(z)$. Z toho můžeme učinit zajímavé pozorování:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \qquad \Rightarrow \qquad \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

- Vidíme tedy, že je-li uvnitř uzavřené křivky jediná singularita, **integrál funkce přes tuto křivku je přímo úměrný reziduu**. Pamatujete si ještě, jak jsme pomocí Cauchyho vzorců řešili situaci, když vnitřek křivky obsahoval singularit více? Jelikož všude mimo singularity by integrál vyšel nulový, zajímají nás právě jen ony. Představili jsme si, že každou singularitu obkroužíme maličkou kružnicí a výsledný integrál byl součtem dílčích integrálů přes tyto pomocné kružničky. Pokud toto zkombinujeme spolu s předešlým pozorováním o reziduích, dostáváme tzv. **Reziduovou větu**:

Nechť γ je jednoduchá uzavřená křivka, a f je na int γ holomorfní, až na navzájem různé izolované singularity $z_1, \dots, z_n \in \operatorname{int} \gamma$. Pak platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

- Ukazuje se, že integrály můžeme počítat přes rezidua. Nicméně, pokud bychom k výpočtu rezidua museli pokaždé přistoupit k sestavení Laurentovy řady, bylo by to absurdně zdlouhavé. Naštěstí existují způsoby, jak dle typu singularity spočítat reziduum rovnou:
  - ⋄ Je-li z_0 KONEČNÁ odstranitelná singularita, pak $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$.
  - ⋄ Je-li z_0 k-násobný pól, platí[33]

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z\to z_0} \left[f(z)(z-z_0)^k \right]^{(k-1)}.$$

  - ⋄ Je-li f v bodě z_0 holomorfní a g má v z_0 jednoduchý pól, pak

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)g(z) = f(z_0) \cdot \operatorname*{res}_{z=z_0} g(z).$$

  - ⋄ Platí, že suma všech reziduí v $z_1, \dots, z_n$ a nekonečnu je nulová, tj.

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

- **Příklad:**

1.

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z} = \underline{\underline{0}} \text{ (protože 0 je odstranitelná singularita, viz dříve)}$$

2.

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{z-1}{z^2(z+2)} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0} \left[\frac{z-1}{z+2} \right]' = \lim_{z\to 0} \frac{1\cdot(z+2)-(z-1)\cdot 1}{(z+2)^2} = \frac{2-(-1)}{2^2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

[33] Jinak řečeno, pro většinu pólů, které potkáme prostě „odmáznu“ problémový člen ve jmenovateli a o jedenkrát míň, než je jeho mocnina zderivuju to, co zbylo a dosadím z_0 (a ještě podělím tím faktoriálem).

3.
$$\operatorname*{res}_{z=0} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = a_{-1}, \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(-n)!} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname*{res}_{z=0} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{(-(-1))!} = \underline{\underline{1}}$$

- **Příklad:** Spočítejme pomocí reziduové věty $\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$, kde $\gamma(t) = 2\mathrm{e}^{it}, \ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

  Naše zadaná křivka je kružnice se středem v 0 a poloměrem 2. Vidíme, že integrand má 3 jednoduché póly: $0, i, -i$. Jelikož tyto všechny leží uvnitř dané křivky, integrál je součtem reziduí ve všech třech pólech:

  a)
$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z(z^2+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2+1} = \frac{\mathrm{e}^0}{0^2+1} = 1$$
  b)
$$\operatorname*{res}_{z=i} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z(z^2+1)} = \lim_{z\to i} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z(z+i)} = \frac{\mathrm{e}^{i\pi}}{i(i+i)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$
  c)
$$\operatorname*{res}_{z=-i} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z(z^2+1)} = \lim_{z\to -i} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z(z-i)} = \frac{\mathrm{e}^{-i\pi}}{-i(-i-i)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$
  Takže označíme-li si $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -i$, výsledný integrál je roven
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} \operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z(z^2+1)} = 2\pi i \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{4\pi i}}.$$

  Pozn.: Možná si teď někteří z Vás říkají, v čem nám reziduová věta pomáhá? Vždyť pro póly jsou výpočty reziduí stejně de facto jen převlečené Cauchyho vzorce, ne? V jistém smyslu samozřejmě ano. Jenže když si pozorně přečtete, co se právě řeklo, máte v tom částečně schovanou odpověď: **Tohle lze říct jen u pólů.** A to ještě navíc pouze u pólů polynomiálního charakteru! Funkce $\frac{z}{\sin^2 z}$ má v bodě $z = 0$ jednoduchý pól, stejně tak funkce $\frac{1}{\mathrm{e}^{-z^2}-1}$ má v bodě $z = 0$ dvojnásobný pól. Ani jednu z nich bychom však přímým užitím Cauchyho vzorců nezintegrovali, jednoduše proto, že ze $\sin^2 z$, ani $\mathrm{e}^{-z^2} - 1$ polynom neuděláme. A co teprve, kdybychom chtěli integrovat funkci s podstatnou singularitou? Tam všude si rezidua poradí, ale Cauchyho vzorce ne. Navíc se rezidua dají užít při výpočtu speciálních typů reálných integrálů, viz skripta.

- Pomocí reziduí se dá navíc spočítat zpětná Laplaceova transformace.[34] A není se co divit, vždyť je definována tzv. Mellinovou formulí pomocí komplexního integrálu:
$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varphi\to\infty} \int_{A-i\varphi}^{A+i\varphi} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s.$$

[34] Pro připomenutí parciálních zlomků viz příslušný úsek v příloze.

Křivka, přes kterou se zde integruje je v zásadě přímka Re $s = A$. Otázkou je, jaké je A? Je to libovolné číslo „vlevo“ od indexu růstu původní funkce. Jelikož singularity Laplaceova obrazu $s_1, \dots, s_n$ se nalézají tamtéž, dostáváme z reziduové věty,[35] že

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{s=s_k} \, Y(s)\mathrm{e}^{st}.$$

Podstatné je, že u Laplace se nedíváme na to, co je „uvnitř“, bereme automaticky sumu reziduí přes všechny singularity, vyjma ∞.

Pozn.: Někoho by mohlo napadnout místo toho počítat pouze záporné reziduum v ∞, jelikož víme, že součet všech reziduí i s tím v ∞ je roven 0. Nápad je to pěkný a zdál by se možná na první pohled méně pracný, nicméně vzhledem k tomu, že ∞ je prakticky bez výjimky **podstatnou singularitou** výrazu $F(s)\mathrm{e}^{st}$, proměnil by se tento postup v neředěné peklo.

- **Příklad:** Spočítejme pomocí reziduí zpětnou Laplaceovu transformaci obrazu

$$Y(s) = \frac{2+s+s^3}{s^2(s+2)(s+5)}.$$

Vidíme, že máme 3 singularity: Dvojnásobný pól v 0 a jednoduché póly v -2 a -5:

a)

$$\operatorname*{res}_{s=0} \frac{2+s+s^3}{s^2(s+2)(s+5)}\mathrm{e}^{st} = \frac{1}{1!}\lim_{s\to0}\left[\frac{2+s+s^3}{(s+2)(s+5)}\mathrm{e}^{st}\right]' =$$

$$= \lim_{s\to0}\left(\frac{(1+3s^2)(s+2)(s+5)-(2+s+s^3)(2s+7)}{(s+2)^2(s+5)^2}\mathrm{e}^{st} + \frac{2+s+s^3}{s^2(s+2)(s+5)}te^{st}\right) =$$

$$= \frac{1\cdot2\cdot5-2\cdot7}{2^2\cdot5^2}\mathrm{e}^0 + \frac{2}{2\cdot5}t\cdot\mathrm{e}^0 = \underline{-\frac{1}{25}+\frac{1}{5}t}$$

b)

$$\operatorname*{res}_{s=-2} \frac{2+s+s^3}{s^2(s+2)(s+5)}\mathrm{e}^{st} = \lim_{s\to-2}\frac{2+s+s^3}{s^2(s+5)}\mathrm{e}^{st} = \frac{2-2+(-2)^3}{(-2)^2\cdot3}\mathrm{e}^{-2t} = \underline{-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2t}}$$

c)

$$\operatorname*{res}_{s=-5} \frac{2+s+s^3}{s^2(s+2)(s+5)}\mathrm{e}^{st} = \lim_{s\to-5}\frac{2+s+s^3}{s^2(s+2)}\mathrm{e}^{st} = \frac{2-5+(-5)^3}{(-5)^2\cdot(-3)}\mathrm{e}^{-5t} = \underline{\frac{128}{75}\mathrm{e}^{-5t}}$$

Součtem tak dostáváme původní funkci:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \sum_{k=1}^{3}\operatorname*{res}_{s=s_k}\frac{2+s+s^3}{s^2(s+2)(s+5)}\mathrm{e}^{st} = \underline{\underline{-\frac{1}{25}+\frac{1}{5}t-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{125}{78}\mathrm{e}^{-5t}}}.$$

Jen pro úplnost, uvedený Laplaceův obraz a následné řešení bychom dostali, kdybychom Laplaceovou transformací řešili diferenciální rovnici

$$y'' + 7y' + 10y = 2t + 1, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -7.$$

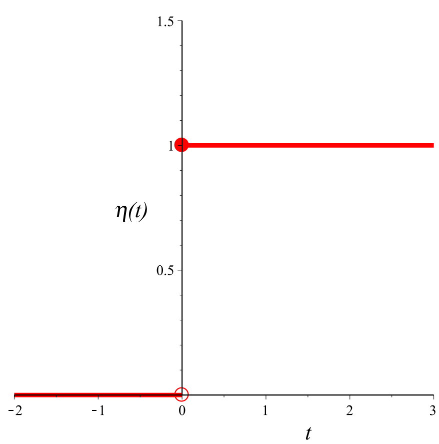
[35] Přímku lze vágně vzato intuitivně chápat jako nekonečnou uzavřenou křivku.

A Laplaceova transformace

Jelikož na cvičeních není pořádně prostor probrat Laplaceovu transformaci, nicméně se z ní dělá projekt a prakticky vždy se vyskytuje u zkoušky, připadalo mi vhodné v příloze alespoň krátce o tématu pojednat. V bodech, tak jako bylo zvykem u ostatních témat. Nijak zvlášť do hloubky se nepůjde, jde čistě o přehled základních metod výpočtu, s důrazem na řešení diferenciálních rovnic, které jsou právě předmětem projektu i zkouškového příkladu. Plus možná jednu či dvě zajímavosti a jiné přístupy pro zájemce, čemuž bude věnován samostatný úsek, tak aby jej mohli „nezájemci“ s klidem vynechat. Např. ve chvíli, kdy budou v panice den před odevzdáváním projektu zjišťovat, co s tím.

A.1 Věci vesměs k projektu nepostradatelné

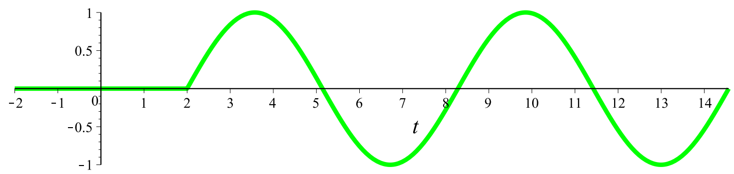
- Ještě než se pustíme do samotné Laplaceovy transformace, podívejme se blíže na tzv. **Heavisideovu funkci**. Značíme ji η a jedná se v podstatě o jednotkovou funkci, která je nulová pro $t < 0$:



Obrázek 30: Heavisideova funkce

  Pokud bychom chtěli tu samou funkci s tím rozdílem, že nulová bude obecněji pro $t < a$, docílíme stejného efektu pomocí $\eta(t-a)$. Používá se především pro konstrukci funkcí, které se chovají „jako obvykle“, ale začínají až v určitém bodě. Například pokud bychom chtěli získat funkci, která vypadá jako sinus, ale „začíná“ až v čísle 2 a do té doby je nulová, bylo by to $\eta(t-2)\sin(t-2)$:[36]

[36]Posunutí v argumentu musí samozřejmě být i v sinu, jinak bychom pouze z klasického sinu „uřízli“ všechno, co je před číslem 2.



Obrázek 31: Graf funkce $\eta(t-2)\sin(t-2)$

- **Laplaceova transformace** funkce f se obvykle značí $\mathcal{L}\{f(t)\}$ a je definována vztahem

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \overset{ozn.}{=} F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

  Jak vidíme, výsledkem Laplaceovy transformace (dále už pouze LT) je opět nějaká funkce, tentokrát v transformované proměnné s! Této funkci $F(s)$ se většinou říká **Laplaceův obraz** funkce f.

- **Pozn.:** „Laplaceovská" proměnná samozřejmě nemusí být vyloženě s, jde jen o označení, může to být klidně p,u, ☼ nebo jak chcete.

- Přímo z definice se dá odvodit spoustu vlastností LT, stejně jako obrazů některých základních funkcí. Tabulku s těmito základními vzorci máte na `stránkách doc. Lamparta`, případně v jeho textu na straně 83. Omlouvám se, ale nechce se mi dělat vlastní tabulku a vypisovat všechna pravidla, nicméně to nejdůležitější, co budeme potřebovat sem přece jen vypíšu a rozebereme si to.

- Vlastnosti LT a základní vzorce, které použijete asi nejčastěji jsou následující:

  - *Linearita*: Jestliže f, g jsou funkce a α, β nějaké konstanty, pak $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$. Zkrátka obraz součtu je součet obrazů, násobení konstantou můžeme vytknout (plyne triviálně z definice, integrál je lineární).
  - *Posun*: $\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t} f(t)\right\}(s) = F(s-\alpha)$ a naopak, $\mathcal{L}\{\eta(t-\alpha) f(t-\alpha)\} = e^{-\alpha s} F(s)$. LT předpokládá $f = 0$ pro $t < 0$, proto ta Heavisideova funkce při zpětném posunu.
  - *Obraz derivace*: Mějme n-krát diferencovatelnou funkci f, přičemž známe hodnotu v nule jí i všech jejích derivaci až do $(n-1)$-ní. Pak platí

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

    Pro koho by to bylo příliš matoucí, tak speciálně budete potřebovat především:

    * $\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0)$,
    * $\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$.

- **Základní obrazy**:
  - $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$,
  - $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$,
  - $\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\right\} = \frac{1}{s-\alpha}$,
  - $\mathcal{L}\{\sin(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$, $\quad \mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\} = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$.

- **Zpětnou Laplaceovu transformaci** značíme $\mathcal{L}^{-1}$. O jejím výpočtu pomocí reziduí už jsme si řekli v příslušném oddíle, druhá možnost pro ty, kterým nesedí rezidua, je rozklad na parciální zlomky, který si stručně připomeneme:

Mějme zlomek $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy a Q má vyšší stupeň, než P (což se u nás bude dít vždy). Dále uvažme, že polynom Q rozložíme na součin závorek, například $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ apod. Zároveň nezapomínejme, že některé členy dále rozložit na závorky nelze, např $x^2 + 1$, takže to neznamená, že všechny činitele budou nutně obsahovat jen první mocninu x. Každopádně, původní zlomek lze pak rozštěpit na dílčí **parciální** zlomky, které mají ve jmenovateli pouze jednu ze závorek. Např.:

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2},$$

jak se určí konstanty A, B si povíme za chvíli, ale stručně řečeno - prakticky jakkoliv libo.

Je třeba dávat si pozor na dvě situace:

- Pokud jeden ze členů obsahuje kvadratický polynom, není v čitateli konstanta, ale neznámý lineární polynom. Tj. např.

  $$\frac{1}{(x^2+1)(x+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+4}.$$

  Další věc, neplést do toho člen x^2, to je totiž jen dvakrát zastoupený člen x, myšleno $(x-0)^2$. To je zase jiná situace, na niž je třeba dát si pozor,
- a to je zastoupení závorky s vyšší, než první mocninou. Pak musí mezi parciálními zlomky být zastoupeny také všechny mocniny nižší. Např.:

  $$\frac{1}{(x-2)^3(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{x+5}.$$

A teď už se na příkladě podívejme, jak ty konstanty nalézt:

Př.: Rozložte na parciální zlomky $\frac{3x^2+4x-6}{x^3+5x^2+6x}$.

Jmenovatel má vyšší stupeň, než čitatel, z tohoto pohledu v pořádku. Nyní musíme jmenovatel rozložit na součin závorek:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = x(x^2 + 5x + 6) = x(x + 2)(x + 3),$$

takže jsme zjistili, že

$$\frac{3x^2 + 4x - 6}{x^3 + 5x^2 + 6x} = \frac{3x^2 + 4x - 6}{x(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x + 3}.$$

Zbývá určit konstanty A, B, C. Nejjednodušší možný přístup je zbavit se zlomků, tj. rovnost přenásobit a poté dosazovat jednotlivé kořeny:

$$\frac{3x^2 + 4x - 6}{x(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x + 3}$$

$$\Downarrow$$

$$3x^2 + 4x - 6 = A(x + 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x + 2)$$

$$\begin{aligned}
x = 0: \quad 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 6 &= A(0 + 2)(0 + 3) + B \cdot 0 \cdot (0 + 3) + C \cdot 0 \cdot (0 + 2) \\
-6 &= 6A \qquad \Rightarrow \qquad \underline{A = -1} \\
x = -2: \quad 12 - 8 - 6 &= B(-2)(-2 + 3) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{B = 1} \\
x = -3: \quad 27 - 12 - 6 &= C(-3)(-3 + 2) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C = 3},
\end{aligned}$$

Takže jsme zjistili, že

$$\underline{\underline{\frac{3x^2 + 4x - 6}{x^3 + 5x^2 + 6x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 2} + \frac{3}{x + 3}}}.$$

Př.: Roložte na parciální zlomky $\frac{7x+11}{(x+2)^2(x-1)}$.

V situacích, na které jsme říkali, že je třeba si dávat pozor, jen se samotným dosazováním nevystačíme a musíme použít jiný trik. Většinou je vhodné použít princip „stejných mocnin musí být na obou stranách stejně“. Nicméně začít můžeme jak to známe, hledáme konstanty A, B, C tak, že

$$\frac{7x + 11}{(x + 2)^2(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2} + \frac{C}{x - 1},$$

$$\Downarrow$$

$$7x + 11 = A(x + 2)(x - 1) + B(x - 1) + C(x + 2)^2$$

$$\begin{aligned}
x = -2: \quad -14 + 11 &= B(-2 - 1) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{B = 1} \\
x = 1: \quad 7 + 11 &= C(1 + 2)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{C = 2},
\end{aligned}$$

jenže další kořen, který bychom mohli dosadit, už nemáme. Právě teď si pro nalezení konstanty A pomůžeme porovnáním mocnin na obou stranách. Bez dosazování za x, zato můžeme dosadit už známé konstanty B a C:

$$7x + 11 = A(x+2)(x-1) + 1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (x+2)^2$$

$$0 \cdot x^2 + 7x + 11 = x^2(A+2) + x(A+9) + (-2A+7)$$

Můžeme použít kteroukoliv mocninu pro srovnání, ale kupříkladu vidíme, že vlevo je „0-krát“ zastoupeno x^2, takže jelikož vpravo je $(A+2)$-krát, tak musí platit $A+2=0$, odtud $\underline{A=-2}$.

- **Jednou z hlavních aplikací LT je řešení Cauchyových úloh**, tj. diferenciálních rovnic s danou počáteční podmínkou. Diferenciální rovnice je rovnice, v níž se hledá neznámá funkce (třeba y) a v rovnici samotné vystupují i její derivace. Např. Rovnice $y'' = f(x)$ může mimo spousty jiných věcí odpovídat rovnici průhybu struny se zatížením v podobě funkce f.

- Výhodou LT je, že zadanou diferenciální rovnici převede na rovnici algebraickou. Jednotlivé kroky jsou následující:
  - Na celou diferenciální rovnici použijeme LT, využijeme pravidel o linearitě a LT derivované funkce,
  - Vzniká nám algebraická rovnice, kde místo neznámé funkce $y(x)$ hledáme její neznámý obraz $Y(s)$,
  - rovnici upravíme do podoby $Y(s) =$„pravá strana“ a zpětnou LT získáme hledanou funkci $y(x)$.

- Než se však pustíme tímto postupem do řešení zadané Cauchyovy úlohy pomocí LT, měli bychom formálně ověřit, že **LT pravé strany má smysl**. Podobně jako u Fourierových řad, kde se ověřují Dirichletovy podmínky, popř. kvadratická integrovatelnost, i LT má na transformovanou funkci požadavek. Aby LT dané funkce existovala, musí platit

$$(\exists M > 0, \sigma \in \mathbb{R})(\forall x \geq 0): \quad |f(x)| \leq M\mathrm{e}^{\sigma x}.$$

Slovy: Pro danou funkci f existuje kladné M a nějaké σ takové, že zadaná funkce je na celém intervalu $\langle 0, \infty)$ menší, než funkce $M\mathrm{e}^{\sigma x}$. Této vlastnosti se říká *omezený růst*. Když je funkce moc rychle rostoucí (například tzv. Gamma funkce), neexistuje její LT. Samozřejmě, ve Vašich projektech budou všechny funkce na pravé straně zadané rovnice mít omezený růst, ale je třeba jej alespoň formálně v každém příkladu ověřit. Jak mám volit M a σ? Pokud napravo není exponenciála, stačí vzít $\sigma = 1$ (funkce e^x roste rychleji než jakákoliv elementární funkce), a aby vše sedělo, vzít M jako $|f(0)|$, pokud $f(0)$ není 0, jinak si můžu

M klidně zvolit jako „bambilion“, je to jedno (v projektu se po Vás rozhodně nechce to M určovat optimálně jako co nejlepší odhad, stačí prostě „nějaké“). To aby se mi nestalo, že pro malá x bych chvilku měl pravou stranu větší než exponenciálu.

Např. funkce $f(x) = 10000x^2$ je od určitého x vždy menší, než e^x (konkrétně od $x \approx 14,568$), ale na velké části x před touto mezí je větší. To M proto musím přihodit pro přeškálování. Je pravda, že mít $f(x) = 1000x^{123}$, už bych to M musel vzít pro jistotu jako 123!, aby mi stačilo $\sigma = 1$, ale vždycky to jde. A ve vašich projektech nic tak šíleného nepotkáte.

Pokud by na pravé straně byla přímo exponenciála, tj. nějaká funkce $f(x) = a \cdot e^{bx}$, stačí vzít přímo $M = a$, $\sigma = b$.

- **Př.:** Řešte pomocí LT Cauchyovu úlohu $y'' + 3y' - 4y = e^{-5x}$, $\quad y(0) = y'(0) = 0$.

U tohoto a příštího příkladu ještě pro úplnost uvedu ověření omezeného růstu pravé strany. Jak vidím, napravo mám e^{-5x}, stačí tedy zvolit $M = 1$ a $\sigma = -5$, je totiž jasné, že platí

$$e^{-5x} \leq 1 \cdot e^{-5x}.$$

Takže formálně v pořádku, můžu příklad řešit, má to smysl. Jak máme o něco výše uvedeno v obecném postupu, nejprve na celou rovnici užijeme LT. Pro přehlednost můžeme každý sčítanec udělat zvlášť:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s \cdot 0 - 0 = s^2Y(s) \\
\mathcal{L}\{3y'\} &= 3(sY(s) - y(0)) = 3sY(s) - 3 \cdot 0 = 3sY(s) \\
\mathcal{L}\{-4y\} &= -4Y(s) \\
\mathcal{L}\left\{e^{-5x}\right\} &\overset{\text{tabulky}}{=} \tfrac{1}{s+5}
\end{aligned}$$

Všimněme si, že pokud bychom neměli počáteční podmínky zadány v 0, nemohli bychom použít pravidlo pro LT derivované funkce. Tomuto případu bude věnován příklad později. Nicméně, nyní tedy stačí dosadit zjištěné obrazy do rovnice a upravit:

$$\begin{aligned}
s^2Y(s) + 3sY(s) - 4Y(s) &= \tfrac{1}{s+5} \\
Y(s) \cdot (s^2 + 3s - 4) &= \tfrac{1}{s+5} \\
Y(s) &= \tfrac{1}{(s+5)(s^2+3s-4)}
\end{aligned}$$

K nalezení funkce $y(x)$ zbývá použít zpětnou LT. K tomu bude potřeba zlomek napravo rozložit na parciální zlomky (nebo použít rezidua, co je komu bližší):

$$\frac{1}{(s+5)(s^2+3s-4)} = \frac{1}{(s+5)(s+4)(s-1)} = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s-1}$$

$$\Downarrow$$

$$1 = A(s+4)(s-1) + B(s+5)(s-1) + C(s+5)(s+4)$$

$$\begin{aligned} s=-5: \quad 1 &= A(-5+4)(-5-1) \quad &\Rightarrow \quad &\underline{A = \tfrac{1}{6}} \\ s=-4: \quad 1 &= B(-4+5)(-4-1) \quad &\Rightarrow \quad &\underline{B = -\tfrac{1}{5}} \\ s=1: \quad 1 &= C(1+5)(1+4) \quad &\Rightarrow \quad &\underline{C = \tfrac{1}{30}}, \end{aligned}$$

čímž dostáváme

$$Y(s) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+5} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s+4} + \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{s-1}$$

a konečně, provedením zpětné LT pomocí tabulek

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{6}e^{-5x} - \frac{1}{5}e^{-4x} + \frac{1}{30}e^{x}\ .}}$$

Právě jsme úspěšně vyřešili zadanou diferenciální rovnici pomocí LT. Pro kontrolu můžeme zkusit spočítat zpětnou LT druhým způsobem, který známe, a to pomocí reziduí - pokud nikde nebyla a nebude chyba, měli bychom samozřejmě dostat stejný výsledek:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\text{počet singularit } Y(s)} \operatorname*{res}_{s=s_k} Y(s)e^{sx} = \sum_{k=1}^{3} \operatorname*{res}_{s=s_k} \frac{1}{(s+5)(s+4)(s-1)}e^{sx}$$

$$\begin{aligned} \operatorname*{res}_{s=-5} \tfrac{1}{(s+5)(s+4)(s-1)}e^{sx} &= \tfrac{1}{(-5+4)(-5-1)}e^{-5x} = \tfrac{1}{6}e^{-5x}, \\ \operatorname*{res}_{s=-4} \tfrac{1}{(s+5)(s+4)(s-1)}e^{sx} &= \tfrac{1}{(-4+5)(-4-1)}e^{-4x} = -\tfrac{1}{5}e^{-4x}, \\ \operatorname*{res}_{s=1} \tfrac{1}{(s+5)(s+4)(s-1)}e^{sx} &= \tfrac{1}{(1+5)(1+4)}e^{x} = \tfrac{1}{30}e^{x} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{6}e^{-5x} - \frac{1}{5}e^{-4x} + \frac{1}{30}e^{x}\ .}}$$

- **Př.:** Řešte pomocí LT Cauchyovu úlohu $y'' + y' - 6y = 13x, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

Napravo mám $13x$, jelikož to není exponenciála, volím $\sigma = 1$ a M, když si nejsem jistý, jak jej zvolit „rozumně“, klidně nastřelím třeba jako $M = 1000$. Pořád je to konečné číslo, to mi stačí. A asi není těžké si rozmyslet (nebo ověřit pomocí grafu), že pro každé $x \geq 0$ platí

$$13x \leq 1000e^x.$$

Budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě. Jediný hmatatelný rozdíl je, že zadané počáteční podmínky nejsou nulové, což se samozřejmě projeví:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s\cdot 1 - 1 = s^2Y(s) - s - 1\\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 = sY(s) - 1\\
\mathcal{L}\{-6y\} &= -6Y(s)\\
\mathcal{L}\{13x\} &\overset{tabulky}{=} \tfrac{13}{s^2}
\end{aligned}$$

Opět, dosadíme nalezené obrazy do zadané rovnice:

$$s^2Y(s) - s - 1 + sY(s) - 1 - 6Y(s) = \tfrac{13}{s^2}$$

Členy bez *Y(s)* musím převést vpravo!

$$\begin{aligned}
s^2Y(s) + sY(s) - 6Y(s) &= \tfrac{13}{s^2} + s + 2\\
Y(s)(s^2 + s - 6) &= \tfrac{13+s^3+2s^2}{s^2}\\
Y(s) &= \tfrac{13+s^3+2s^2}{s^2(s^2+s-6)}
\end{aligned}$$

Máme vyjádřeno $Y(s)$, stačí najít zpětnou LT pravé strany.

Pozn.: Hledat parciální zlomky v tomto případě by bylo lehce nehezké (já to tady udělám ručně), což je v zadáních projektů poměrně častým fenoménem. **PROTO V PROJEKTECH NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY KLIDNĚ POUŽIJTE (ONLINE) SOFTWARE!** Např. `Symbolab` nebo `WolframAlpha`. Kdo bude počítat rezidua, nutno upozornit, že kvůli s^2 ve jmenovateli bude minimálně jedno reziduum také ne zcela líbezné, co se výpočtu týče.

Zpátky k výpočtu:

$$\frac{13+s^3+2s^2}{s^2(s^2+s-6)} = \frac{13+s^3+2s^2}{s^2(s+3)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s-2}$$

$$\Downarrow$$

$$13 + s^3 + 2s^2 = As(s+3)(s-2) + B(s+3)(s-2) + Cs^2(s-2) + Ds^2(s+3)$$

$$\begin{aligned}
s=0: &\quad 13 = B(0+3)(0-2) &&\Rightarrow \quad \underline{B = -\tfrac{13}{6}}\\
s=-3: &\quad 13 - 27 + 2\cdot 9 = C\cdot 9\cdot(-3-2) &&\Rightarrow \quad \underline{C = -\tfrac{4}{45}}\\
s=2: &\quad 13 + 8 + 2\cdot 4 = D\cdot 4\cdot(2+3) &&\Rightarrow \quad \underline{D = \tfrac{29}{20}}.
\end{aligned}$$

Jelikož 0 je dvojnásobný kořen, k nalezení A je třeba využít „pravidlo o stejných mocninách“:

$$13 + s^3 + 2s^2 = As(s+3)(s-2) - \frac{13}{6}(s+3)(s-2) - \frac{4}{45}s^2(s-2) + \frac{29}{20}s^2(s+3).$$

V tomto případě bude nejjednodušší porovnat členy s s^3. Vpravo (mimo jiných členů) vznikne

$$s^3\left(A - \frac{4}{45} + \frac{29}{20}\right),$$

vlevo je s^3 jednou, tzn.:

$$1 = A - \frac{4}{45} + \frac{29}{20} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{A = 1 + \frac{4}{45} - \frac{29}{20} = -\frac{13}{36}}.$$

Tím pádem jsme zjistili, že

$$Y(s) = -\frac{13}{36}\cdot\frac{1}{s} - \frac{13}{6}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{4}{45}\cdot\frac{1}{s+3} + \frac{29}{20}\cdot\frac{1}{s-2},$$

přes tabulky tak dostáváme řešení

$$\underline{\underline{y(x) = -\frac{13}{36} - \frac{13}{6}x - \frac{4}{45}e^{-3x} + \frac{29}{20}e^{2x}}}\,.$$

- Jak jsme naznačili dříve, nemusíme mít počáteční podmínky zadány v bodě $x = 0$. Pokud jsou nicméně všechny ve stejném bodě, tak jako tomu bude ve druhém příkladě Vašeho projektu, dá se toto obejít **posunutím souřadného systému**:

Př.: Řešte pomocí LT Cauchyovu úlohu $y'' + y' - 2y = 3x - 20, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 2.$

Abychom mohli použít LT, potřebujeme podmínky mít zadané v 0. Takže si zavedeme novou pomocnou proměnnou $\tilde{x}$, nic lehčího není! Jak? Inu, když máme podmínky zadány v 1 a chceme se dostat do 0, chtěli bychom 1 odečíst, že? Takže si pomocnou proměnnou zavedeme jako $\tilde{x} = x - 1$, jinak zapsáno $x = \tilde{x} + 1$. Hotovo, v nové proměnné $\tilde{x}$ má zadaná rovnice tvar

$$y'' + y' - 2y = 3(\tilde{x}+1) - 20, \quad y(1-1) = 0,\ y'(1-1) = 2,\ \text{a tedy}$$

$$y'' + y' - 2y = 3\tilde{x} - 17, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$$

[37]To nebylo tak těžké, ne? Teď už můžeme postupovat stejně jako v předchozích příkladech:

[37]Formálně bychom i funkci y měli přeznačit jako $\tilde{y}$, neboť jde o funkci v nové proměnné, ale nechme to tak, jak to je, zbytečně by bylo „převlnkováno“. Z kontextu je jasné, kdy je y v jaké proměnné.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s\cdot 0 - 2 = s^2Y(s) - 2 \\
\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 0 = sY(s) \\
\mathcal{L}\{-2y\} &= -2Y(s) \\
\mathcal{L}\{3\tilde{x} - 17\} &\overset{tabulky}{=} \tfrac{3}{s^2} - \tfrac{17}{s}
\end{aligned}
$$

Opět, dosadíme nalezené obrazy do zadané rovnice:

$$
\begin{aligned}
s^2Y(s) - 2 + sY(s) - 2Y(s) &= \tfrac{3}{s^2} - \tfrac{17}{s} \\
s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) &= \tfrac{3}{s^2} - \tfrac{17}{s} + 2 \\
Y(s)(s^2 + s - 2) &= \tfrac{3-17s+2s^2}{s^2} \\
Y(s) &= \tfrac{3-17s+2s^2}{s^2(s^2+s-2)}
\end{aligned}
$$

Máme vyjádřeno $Y(s)$, stačí najít zpětnou LT pravé strany:

$$
\frac{3-17s+2s^2}{s^2(s^2+s-2)} = \ldots \text{rozklad na parciální zlomky} \ldots = \frac{31}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{s+2} - 4\cdot\frac{1}{s-1},
$$

odkud dostáváme

$$
y(\tilde{x}) = \frac{31}{4} - \frac{3}{2}\tilde{x} - \frac{15}{4}\mathrm{e}^{-2\tilde{x}} - 4\mathrm{e}^{\tilde{x}}.
$$

Jediné co zbývá, je dosadit zpátky do původní proměnné, tj. dosadit $\tilde{x} = x - 1$:

$$
y(x) = \frac{31}{4} - \frac{3}{2}(x-1) - \frac{15}{4}\mathrm{e}^{-2(x-1)} - 4\mathrm{e}^{x-1},
$$

$$
\underline{\underline{y(x) = \frac{37}{4} - \frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\mathrm{e}^{2-2x} - 4\mathrm{e}^{x-1}\ .}}
$$

- Může se stát, že pravá strana nepůjde (alespoň zdánlivě) transformovat jen pomocí tabulek. To je případ třetího příkladu projektu, kdy je pravá strana definovaná po částech:

Př.: Řešte pomocí LT: $y'' - y = f(x)$, kde $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in \langle 0, 3), \\ 0, & x \geq 3 \end{cases}$, $\quad y(0) = y'(0) = 0.$

Je otázka, jak spočítat LT pravé strany. V takovýchto případech si buď lze pomoci trikem (viz následující oddíl A.2 „pro zájemce“), nebo jednoduše přímým spočítáním z definice. Připomeňme:

$$
\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x.
$$

Jinak postupujeme jako vždy:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s\cdot 0 - 0 = s^2Y(s)\\
\mathcal{L}\{-y\} &= -Y(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(x)\} &= \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_0^3 (1-x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x + \underbrace{\int_3^\infty 0\cdot \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x}_{=0} =\\
&\overset{per\ partes}{=} -\tfrac{1}{s}\left[(1-x)\mathrm{e}^{-sx}\right]_0^3 - \left(-\tfrac{1}{s}\right)\int_0^3 (-1)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{s} + \tfrac{2\mathrm{e}^{-3s}}{s} - \tfrac{1}{s^2} + \tfrac{\mathrm{e}^{-3s}}{s^2}
\end{aligned}$$

Vidíme, že nám po LT pravé strany vyšly členy s exponenciálou, to je pro po částech definovanou pravou stranu typické. Je dobré si zapsat zvlášť členy bez exponenciály a zvlášť členy s ní:

$$\frac{1}{s} + \frac{2\mathrm{e}^{-3s}}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{s^2} = \frac{s-1}{s^2} + \mathrm{e}^{-3s}\cdot\frac{2s+1}{s^2}$$

To děláme proto, že násobení exponenciálou bude při zpětné LT znamenat pouhé posunutí v argumentu, můžeme tak řešit přes parciální zlomky, i když je tam exponenciála. Dosadíme do rovnice:

$$\begin{aligned}
s^2Y(s) - Y(s) &= \tfrac{s-1}{s^2} + \mathrm{e}^{-3s}\cdot\tfrac{2s+1}{s^2}\\
Y(s)(s^2-1) &= \tfrac{s-1}{s^2} + \mathrm{e}^{-3s}\cdot\tfrac{2s+1}{s^2}\\
Y(s) &= \tfrac{s-1}{s^2(s^2-1)} + \mathrm{e}^{-3s}\cdot\tfrac{2s+1}{s^2(s^2-1)}
\end{aligned}$$

Vidíme, že vpravo máme dva sčítance, první můžeme řešit klasicky přes parciální zlomky, druhý taktéž, jen bez exponenciály, ta se pak, jak již bylo zmíněno, projeví posunutím v argumentu. V praxi to bude znamenat, že řešení bude mít také „více větví“, stejně jako zadaná pravá strana.

$$\frac{s-1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{s^2(s+1)} = \ldots \text{parciální zlomky} \ldots = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

$$\mathrm{e}^{-3s}\frac{2s+1}{s^2(s^2-1)} = \mathrm{e}^{-3s}\frac{2s+1}{s^2(s-1)(s+1)} = \ldots \text{parciální zlomky} \ldots = \mathrm{e}^{-3s}\left(-2\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s-1}\right)$$

takže zpětnou LT máme

$$y(x) = -1 + x + \mathrm{e}^{-x} + \eta(x-3)\left(-2 - (x-3) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-3)} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{x-3}\right)$$

$$y(x) = -1 + x + \mathrm{e}^{-x} + \eta(x-3)\left(1 - x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3-x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{x-3}\right),$$

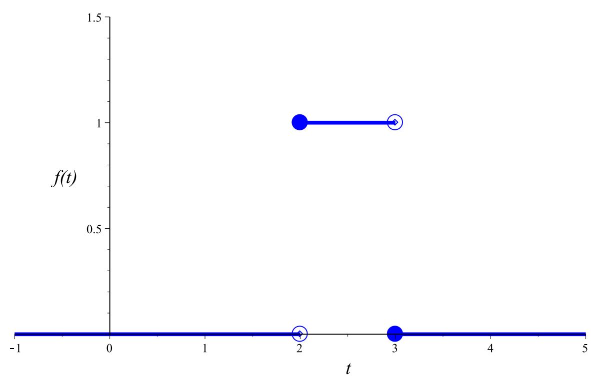
což lze zapsat do podoby

$$y(x) = \begin{cases} -1 + x + \mathrm{e}^{-x}, & x \in \langle 0, 3)\\ \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3-x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{x-3}, & x \geq 3.\end{cases}$$

Ta druhá větev je vlastně součtem modrého a červeného výsledku (už bez Heavisidea). Proč to není jen ten červený výsledek? Od čísla 3 se díky $\eta(x-3)$ projeví i červená. To ale neznamená, že modrá zmizela, pořád tam je, takže červenou musím přičíst k již se vyskytující modré.

A.2 Věci pro nezájemce s klidem postradatelné

- Heavisideovými funkcemi s různým posunutím v argumentu si můžeme pomoci v případě příkladu s nespojitou pravou stranou. Heavisideova funkce se totiž elegantně dá použít ke konstrukci „schodových“ funkcí, řekněme digitálnímu impulsu. Funkci, která je na intervalu (a, b) rovna 1 a všude jinde je nulová, symbolicky $f(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t < b \\ 0, & jinak \end{cases}$, lze totiž zapsat jako $\eta(t-a) - \eta(t-b)$:



Obrázek 32: Graf funkce $f(t) = \eta(t-2) - \eta(t-3)$

Samozřejmě lze konstruovat i složitější schodové funkce. Pokud bychom chtěli jinou funkční hodnotu, než 1, ale obecně C, jednoduše bychom schod vynásobili tímto číslem. Pokud bude schodů víc, stačí dle výše uvedeného každý schod sestavit a předpis výsledné schodové funkce bude součtem.

Např. funkci

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 1 \leq t < 3, \\ -1, & 3 \leq t < 4, \\ 0, & jinak \end{cases}$$

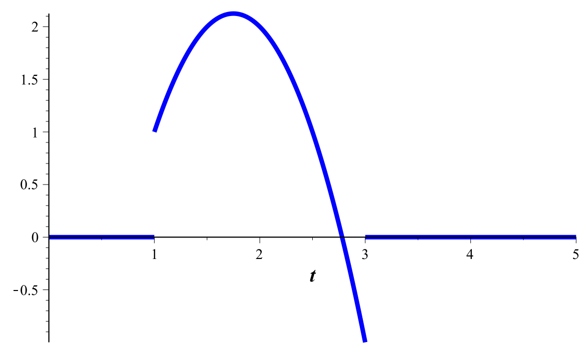
bychom mohli zapsat jako

$$f(t) = 2(\eta(t-1) - \eta(t-3)) + (-1)(\eta(t-3) - \eta(t-4)) = 2\eta(t-1) - 3\eta(t-3) + \eta(t-4).$$

Pokud bychom dostali v zadání funkci definovanou takto:

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & t \in \langle a, b), \\ 0, & jinde, \end{cases}$$

můžeme ji jednoduše zapsat jako $f(t) = g(t)\,(\eta(t-a) - \eta(t-b))$.



Obrázek 33: Graf funkce $f(t) = (7t - 2t^2 - 4)\,(\eta(t-1) - \eta(t-3))$

- Pro výpočet zpětné LT se dá použít také tzv. **konvoluce**. Konkrétněji, pokud $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ a $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$, pak platí

$$F(s) \cdot G(s) = \mathcal{L}\{(f * g)(x)\},$$

kde výraz $(f * g)(x)$ je právě konvoluce funkcí f a g a je definována následovně:[38]

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(\xi) g(x - \xi) \mathrm{d}\xi.$$

Tento postup může být výhodné použít tam, kde chceme zpětně transformovat výraz, jenž je součinem jednodušších prvků. Samozřejmě, tyto jednodušší prvky by měly být takové, že je dokážeme transformovat okamžitě a jedinou „překážkou“ je onen součin. Konkrétně může jít například o situaci, kdy máme jednoduchý čitatel ve zlomku a zlomek jako takový má vícenásobné póly (pak je pracný jak rozklad na parciální zlomky, tak výpočet přes rezidua). Dalším příhodným použitím může být příklad s nespojitou pravou stranou.

Př.: Nalezněme pomocí konvoluce zpětnou LT k obrazu

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}.$$

[38] Formálně je konvoluce definována jako integrál přes všechna reálná čísla, ale spodní mez 0 je dána předpoklady LT a proměnná horní mez je poplatná vlastnostem konvoluce.

Vidíme, že naše $Y(s)$ lze zapsat jako součin, konkrétně $Y(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+1}$. Zároveň víme (viz tabulky), že $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x$ a $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \mathrm{e}^{-x}$. Nyní stačí použít konvoluci:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+1}\right\} = (x * \mathrm{e}^{-x}) = \int_0^x \xi \mathrm{e}^{-(x-\xi)} \mathrm{d}\xi \overset{per\ partes}{=} \left[\xi \mathrm{e}^{\xi-x}\right]_0^x - \int_0^x 1 \cdot \mathrm{e}^{\xi-x} \mathrm{d}\xi =$$

$$= \left[\xi \mathrm{e}^{\xi-x}\right]_0^x - \left[\mathrm{e}^{\xi-x}\right]_0^x = x - 0 - 1 + \mathrm{e}^{-x} = \underline{\underline{x - 1 + \mathrm{e}^{-x}}}.$$

Př.: Nalezněme pomocí konvoluce zpětnou LT k obrazu

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s-1)(s-5)}.$$

Vidíme, že tentokrát máme součin tří výrazů, které jsme schopni transformovat okamžitě (opět, viz tabulky):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = x^2, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = \mathrm{e}^{x}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = \mathrm{e}^{5x}.$$

Když máme 3 dílčí výrazy a chceme řešit situaci konvolucí, je zřejmé, že konvoluci budeme dělat dvakrát - Nejprve najdeme vzor součinu dvou výrazů, pak najdeme celkový vzor. V jakém pořadí? Na tom nesejde, konvoluce je jak komutativní, tak asociativní. Pro pořádek můžeme postupovat třeba „popořadě“:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s-1}\right\} = \left(x^2 * \mathrm{e}^{x}\right) = \int_0^x \xi^2 \mathrm{e}^{x-\xi} \mathrm{d}\xi \overset{per\ partes}{=} \left[-\xi^2 \mathrm{e}^{x-\xi}\right]_0^x + \int_0^x 2\xi \mathrm{e}^{x-\xi} \mathrm{d}\xi$$

$$\overset{per\ partes}{=} \left[-\xi^2 \mathrm{e}^{x-\xi}\right]_0^x + \left[-2\xi \mathrm{e}^{x-\xi}\right]_0^x + \int_0^x 2\mathrm{e}^{x-\xi} \mathrm{d}\xi = -x^2 + 0 - 2x - 2 + 2\mathrm{e}^{x} = -(x^2 + 2x + 2) + \mathrm{e}^{x}.$$

První půlka za námi, nyní najdeme vzor celku pomocí další konvoluce:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-5}\right\} = \left((-(x^2 + 2x + 2) + \mathrm{e}^{x}) * \mathrm{e}^{5x}\right) \overset{linearita}{=} -((x^2 + 2x + 2) * \mathrm{e}^{5x}) + 2(\mathrm{e}^{x} * \mathrm{e}^{5x}) =$$

$$= -\int_0^x (\xi^2 + 2\xi + 2)\mathrm{e}^{5(x-\xi)} \mathrm{d}\xi + 2\int_0^x \mathrm{e}^{\xi}\mathrm{e}^{5(x-\xi)} \mathrm{d}\xi \overset{per\ partes}{=} \frac{1}{5}\left[(\xi^2 + 2\xi + 2)\mathrm{e}^{5(x-\xi)}\right]_0^x -$$

$$-\frac{1}{5}\int_0^x (2\xi + 2)\mathrm{e}^{5(x-\xi)} \mathrm{d}\xi - \frac{2}{4}\left[\mathrm{e}^{5x-4\xi}\right]_0^x \overset{per\ partes}{=} \frac{1}{5}\left[(\xi^2 + 2\xi + 2)\mathrm{e}^{5(x-\xi)}\right]_0^x + \frac{1}{25}\left[(2\xi + 2)\mathrm{e}^{5(x-\xi)}\right]_0^x -$$

$$-\frac{1}{25}\int_0^x 2\mathrm{e}^{5(x-\xi)} \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{5x-4\xi}\right]_0^x =$$

$$= \frac{1}{5}\left[(\xi^2 + 2\xi + 2)\mathrm{e}^{5(x-\xi)}\right]_0^x + \frac{1}{25}\left[(2\xi + 2)\mathrm{e}^{5(x-\xi)}\right]_0^x + \frac{1}{125}\left[2\mathrm{e}^{5(x-\xi)}\right]_0^x - \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{5x-4\xi}\right]_0^x =$$

$$= \frac{1}{5}\left(x^2+2x+2-2\mathrm{e}^{5x}\right)+\frac{1}{25}\left(2x+2-2\mathrm{e}^{5x}\right)+\frac{1}{125}\left(2-2\mathrm{e}^{5x}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{5x}\right)=$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{5}x^2+\frac{12}{25}x+\frac{62}{125}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{250}\mathrm{e}^{5x}}}$$

Př.: Nalezněme pomocí konvoluce zpětnou LT k obrazu

$$Y(s)=\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s(s^2+1)}.$$

Postupujeme stejně jako v předchozích příkladech:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}\right\}=\eta(x-2),\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin x,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}=(\eta(x-2)*\sin x)=\int_0^x\eta(\xi-2)\sin(x-\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$$x<2:\quad \int_0^x\eta(\xi-2)\sin(x-\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^x 0\cdot\sin(x-\xi)\mathrm{d}\xi=0,$$

$$x\geq 2:\quad \int_0^x\eta(\xi-2)\sin(x-\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^2 0\cdot\sin(x-\xi)\mathrm{d}\xi+\int_2^x 1\cdot\sin(x-\xi)\mathrm{d}\xi=0+\left[-(-\cos(x-\xi))\right]_2^x=$$

$$=\cos 0-\cos(x-2)=1-\cos(x-2),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}=\underline{\underline{\eta(x-2)(1-\cos(x-2))}}$$

- LT se dá mimo jiné také použít k výpočtu integrálů:

Př.: Spočítejme pomocí Laplaceovy transformace $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Jelikož obecně $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=F(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t$, vidíme, že stačí položit $s=0$ a dostáváme vztah

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t=F(0).$$

Stačí tedy nalézt $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$ a dosadit 0.[39] Víme (viz tabulky), že $\mathcal{L}\{\sin t\}(s)=\frac{1}{s^2+1}$. Abychom

[39] Formálně to nemusí jít úplně vždy s ohledem na limitní přechod, obecně bychom potřebovali, aby posloupnost $\left\{f(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ měla tzv. absolutně integrovatelnou majorantu, ale většinou to jde.

nalezli Laplaceův obraz funkce $\frac{\sin t}{t}$, použijeme vlastnost LT $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\tilde{s})\mathrm{d}\tilde{s}$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty \mathcal{L}\{\sin t\}(\tilde{s})\mathrm{d}\tilde{s} = \int_s^\infty \frac{1}{\tilde{s}^2+1}\mathrm{d}\tilde{s} = [\arctan \tilde{s}]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s.$$

Nyní už prostým dosazením $s = 0$ vidíme, že

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(0) = \frac{\pi}{2} - \arctan 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

- Samozřejmě podobný princip na vyčíslení integrálů se dá použít i pro jiné s, než nulové:

Př.: Spočítejme pomocí Laplaceovy transformace $\int_0^\infty \cos(2t)\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{d}t$.

Opět - víme, že obecně (viz tabulky) $\int_0^\infty \cos(2t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{s}{s^2+2^2}$, zadaný integrál tedy vyčíslíme okamžitě dosazením $s = 4$:

$$\int_0^\infty \cos(2t)\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{d}t = \frac{4}{4^2+2^2} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

- LT se dá použít i pro řešení parciálních diferenciálních rovnic tím, že je převede na obyčejné diferenciální rovnice. Tyto už většinou nelze řešit přímo pomocí LT, tak jako jsme to dělali dříve, i tak se ale může často jednat o významně ulehčující krok. Navíc se takto dá ukázat poměrně zajímavá věc, viz další bod.

- Tzv. Chybová funkce nebo-li *Error function* je definována takto:

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

Velmi hojně se vyskytuje ve statistice. Například pokud *náhodná veličina* pochází z tzv. normálního rozdělení (grafem jeho hustoty je Gaussova křivka) se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ, dá se pravděpodobnost, že tato veličina nabývá hodnoty v intervalu (a, b), spočítat jako

$$F(b) - F(a), \quad \text{kde } F(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right).$$

Typickým příkladem je třeba IQ v populaci, které se řídí normálním rozdělením s parametry $\mu = 100, \sigma = 15$. Např. pravděpodobnost, že náhodně vybraný člověk má IQ mezi 150 a 160 je tak

$F(160) - F(150) \approx 0{,}0004 = 0{,}04\%$. (Spadáte tam? :))

Co by ale člověk neřekl, že erf má něco společného s vedením tepla. A ono ano, fundamentální řešení problému vedení tepla v čase a prostoru je vyskládáno pomocí erf, což se dá mimo jiných způsobů ukázat právě i pomocí LT.

B Několik příkladů k procvičení

V této příloze naleznete několik málo příkladů i s řešeními. Příklady, které jsou spíše pro zamyšlení nebo patří k těžším a měly by prověřit Vaše porozumění látce, nicméně se přímo netýkají typického „testového obsahu“, jsou označeny symbolem $\ast$.

B.1 Zadání

1. Určete Re z^m a Im z^m, je-li:

   (a) $z = 1 + i,\ m = 6$

   (b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ m = 5$

   (c) $z = -\frac{\sqrt{2}}{1+i},\ m = 16$

   (d) $z = \frac{3\sqrt{3}+5i}{2\sqrt{3}-i},\ m = 9$

   (e) $z = -1 + i\sqrt{3},\ m = -5$

   (f) $z = \frac{6+8i}{1-7i} + 1,\ m = 1984$

   (g) $\ast$ $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}},\ m = 4$

2. Určete $\sqrt[m]{z}$, je-li:

   (a) $z = 16,\ m = 4$

   (b) $z = \left(i - \sqrt{3}\right)^3 + (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2,\ m = 2$

   (c) $z = (6 + 4i)(3 - 2i) + 1,\ m = 3$

   (d) $z = \left(\frac{8i-2}{3+5i}\right)^4 + 3,\ m = 6$

3. $\ast$ Pokuste se pomocí základních znalostí komplexních čísel (exp. tvar, Moivreova věta apod.) dokázat následující trigonometrické identity:

   (a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. S jejím použitím najděte z takové, že $\arg z = \frac{\pi}{12}$.

   (b) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

   (c) $\sin(5\alpha) = 5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha$

4. Zakreslete v Gaussově rovině množiny dané následujícími podmínkami:

   (a) $|z - 1 + i| \le \sqrt{2}$

   (b) $0 < \text{Re } z < 1 \ \wedge\ \arg z \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

   (c) $|z + 2i| = |z|$

   (d) $\text{Re } \frac{z+1}{z-1} < 0$

(e) $\operatorname{Im} \frac{z+1}{z-1} = 0$

5. Vypočítejte:

   (a) $e^{3+8\pi i}$

   (b) $\cos i - \cosh 1$

   (c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3i\right)$

   (d) $\operatorname{Ln}(3 + 4i)$

   (e) $\ln(-\cos(-7i))$

   (f) $(-1)^{2i}$

   (g) * i^{i^i}

6. Určete všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která platí:

   (a) $z^3 - 2z^2 + 5z = 0$

   (b) $z^8 = 16$

   (c) $e^z = i$

   (d) $\cos z = 3i$

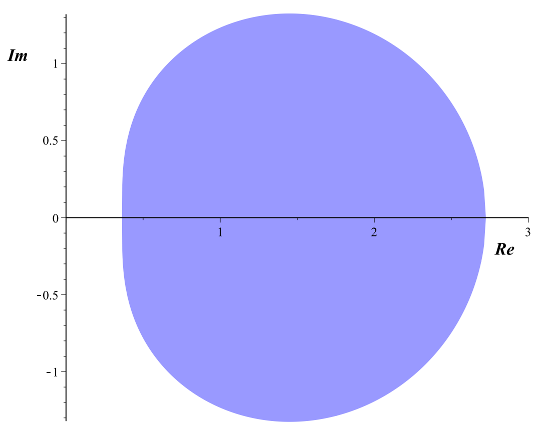
   (e) $\sin z = i$

   (f) * $\operatorname{tg} z = \frac{m^2-1}{i(m^2+1)}, \quad m \in \mathbb{N}$

7. * Dá se ukázat, že pro každé $w \in \mathbb{C}$ takové, že $|\ln w| \le 1$ se dá najít $z \in \mathbb{C}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{z^{z^{\cdot^{\cdot^{z}}}}}_{n-\text{krát}} = z^{z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = w.$$

   Určete z, pro které platí $w = 1 + i$.



Obrázek 34: Množina $\{w \in \mathbb{C} : |\ln w| < 1\}$

8. Určete reálnou a imaginární část funkce f a zjistěte, ve kterých bodech má f derivaci a kde je holomorfní, je-li:

   (a) $f(z) = z^2$

   (b) $f(z) = z^4 - 3z^2 + 1$

   (c) $f(z) = \frac{1}{z}$

   (d) $f(z) = z \cdot \overline{z} + 2i \cdot \mathrm{Re}\, z$

   (e) $f(z) = \mathrm{e}^{z+i}$

   (f) $f(z) = \sin z$

9. K zadané funkci u nebo v najděte druhou tak, aby byla funkce $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfní, platí-li:

   (a) $u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2,\ f(i) = 0$

   (b) $v(x,y) = 2x^3y - 2xy^3 + 2xy + 1,\ f(2) = 12 + i$

   (c) $u(x,y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y),\ f(1) = \mathrm{e}$

   (d) $v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ f(1+i) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

   (e) $u(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}\cos(x+y),\ f(1-i) = \mathrm{e}^2$

   (f) $v(x,y) = -\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy),\ f(0) = -i$

10. $*$Dokažte následující vlastnosti lineárních lomených funkcí:

    (a) Inverze k lineární lomené funkci je opět lineární lomená funkce.

    (b) Lineární lomená funkce je jednoznačně zadána trojicí bodů a jejich funkčních hodnot.

11. Najděte f-obraz množiny Ω, jestliže je zadáno:

    (a) $f(z) = \frac{z+2}{z-1},\quad \Omega = \mathcal{U}(0,1)$

    (b) $f(z) = \frac{iz}{z-1},\quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\, z < 1\}$

    (c) $f(z) = 1 - iz,\quad \Omega = \mathcal{U}(0,2)$

    (d) $*\, f(z) = \frac{z}{z-i},\quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\ \wedge\ \mathrm{Re}\, z > 0\ \wedge\ \mathrm{Im}\, z < 0\}$

12. Vhodným způsobem vypočítejte uvedené integrály:

    (a) $\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z,\ \gamma(t) = e^{2it}, t \in \langle 0, \pi\rangle$

    (b) $\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z,\ \gamma(t) = e^{it}, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

    (c) $\int_\gamma \frac{z+4}{z^2-2z} \mathrm{d}z,\ \gamma(t) = 1 + 2e^{it}, t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

    (d) $\int_\gamma \frac{i\sin(\pi z)}{z^2+2z+1} \mathrm{d}z,\ \gamma(t) = 2e^{it}, t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

(e) $\int_\gamma \frac{e^z}{(z^2-1)(z-1)^2}\mathrm{d}z,\ \gamma(t) = 1 + e^{it}, t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

(f) $\int_\gamma \frac{\sqrt{12}\sinh(iz\sqrt{3})}{(z-\pi\sqrt{3})^6}\mathrm{d}z,\ \gamma(t) = 10e^{it}, t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

(g) $\int_\gamma (4z^3 - 2z + 1)\mathrm{d}z,\ \gamma(t) = 1 - t + it, t \in \langle 0, 1\rangle$

(h) $\int_\gamma z\cos z\mathrm{d}z,\ \gamma(t) = \begin{cases} -i\left(t + \frac{3\pi}{2}\right), & t \in \left\langle -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\rangle \\ \pi e^{it}, & t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right\rangle \end{cases}$

(i) $\int_\gamma e^z \sin(e^z)\mathrm{d}z,\ \gamma(t) = \begin{cases} 1 + e^{-i\pi t}, & t \in \langle -1, 0\rangle \\ 2 - t, & t \in (0, 2 - \ln\pi\rangle \end{cases}$

(j) $\int_\gamma \frac{9}{z^2+5z-14}\mathrm{d}z,\ \gamma(t) = \begin{cases} 3 + i(t+2), & t \in \langle -2, 0\rangle \\ 3 + 2e^{i\pi(1-2t)}, & t \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle \end{cases}$

13. Určete obor konvergence dané mocninné řady:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^5 + n^2 - 3)(z-i)^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{4^n}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-5+3i)^n}{(n+1)!}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in}(z+2)^n$

14. *Určete součet řady:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{3^n(n+2)}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\pi^n(n-1)}{n!}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cosh n}{e^{2n}n}$

(d) *Pomocí součtu řady určete součin[40]

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}}$$

15. Určete ze zadaného částečného Fourierova rozvoje ω, T a první 4 členy amplitudového, resp. první 3 fázového spektra:

(a) $1 + \cos(2t) + 2\cos(4t) - 2\sin(4t) + \sin(6t) \pm \dots$

(b) $\cos(\pi t) + \sqrt{3}\sin(\pi t) - \sqrt{2}\cos(2\pi t) - \sqrt{2}\sin(2\pi t) + 3\cos(3\pi t) \pm \dots$

[40]**Pro zájemce:** Tak trochu tento součin souvisí s tzv. `Collatzovým problémem`, někdy zvaným též dosti výmluvně „$3n+1$“-problém.

(c) $-3-\cos(10t)+\sin(10t)+\sqrt{3}\cos(15t)-\sin(15t)\pm\dots$

16. Nalezněte na daném oboru konvergence Laurentův rozvoj zadané funkce:

   (a) $f(z)=\frac{1}{z+4}$, $\quad P(-2,0,2)$

   (b) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, $\quad P(0,0,\infty)$

   (c) $f(z)=\frac{8}{(z^2-16)}$, $\quad P(3,1,7)$

   (d) $f(z)=\frac{1}{z^3+z^2}$, $\quad P(0,1,\infty)$

17. *Nechť f je holomorfní na $\mathbb{C}$ vyjma konečného množství izolovaných singularit. Dokažte, že

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=\operatorname*{res}_{z=0} -\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right).$$

18. Vypočítejte následující rezidua:

   (a) $\operatorname*{res}_{z=-2} \frac{z+2}{z^2+7z+10}$

   (b) $\operatorname*{res}_{z=i} \frac{z}{z^2+1}$

   (c) $\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{z}$

   (d) $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{e^{2z}}{z^5}$

   (e) * $\operatorname*{res}_{z=-1} \frac{-1}{z(z+1)^{25}}$

19. *Spočítejte

   (a) Laplaceovy transformace zadaných funkcí:

      i. $f(t)=|t-2|$

      ii. $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$

      iii. $f(t)=\operatorname{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}\mathrm{d}u$

   (b) následující integrály pomocí Laplaceovy transformace:

      i.
$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-et}}{t}\mathrm{d}t$$

      ii.
$$\int_0^\infty \frac{e^{-4\pi t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

      iii.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\tan t)e^{-2\tan t}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

20. Pomocí Laplaceovy transformace vyřešte zadané Cauchyovy úlohy:

(a) $y'' - 3y' = -9x^2 - 1,\ y(0) = 6, y'(0) = 1$

(b) $y'' - y' - 12y = 12,\ y(0) = y'(0) = 1$

(c) $y'' - 4y' + 4y = 2\mathrm{e}^{2x},\ y(0) = y'(0) = 0$

(d) $y'' + y = 1 - 2\sin x,\ y(0) = y'(0) = 1$

(e) $y'' + 4y' + 4y = 12 - 4x,\ y(1) = 2, y'(1) = 0$

(f) $y'' - 4y = f(x) = \begin{cases} 16, & 0 \le x < 1, \\ -8, & 1 \le x < 2, \\ 0, & x \ge 2 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0$

B.2 Výsledky

1. Určete Re z^m a Im z^m, je-li:

   (a) Re $z^6 = 0$, Im $z^6 = -8$

   (b) Re $z^5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, Im $z^5 = -\frac{1}{2}$

   (c) Re $z^{16} = 1$, Im $z^{16} = 0$

   (d) Re $z^9 = -512$, Im $z^9 = 0$

   (e) Re $z^{-5} = -\frac{1}{64}$, Im $z^{-5} = \frac{\sqrt{3}}{64}$

   (f) Re $z^{1984} = 1$, Im $z^{1984} = 0$

   (g) * Re $z^4 = 0$, Im $z^4 = 16$

2. Určete $\sqrt[m]{z}$, je-li:

   (a) $\sqrt[4]{z} = \{\pm 2, \pm 2i\}$

   (b) $\sqrt[2]{z} = \left\{\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}\right\}$

   (c) $\sqrt[3]{z} = \left\{3, -\frac{3}{2} \pm i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$

   (d) $\sqrt[6]{z} = \left\{\pm i, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}\right\}$

3. * Pokuste se pomocí základních znalostí komplexních čísel (exp. tvar, Moivreova věta apod.) dokázat následující trigonometrické identity:

   (a) Napište si $e^{i(\alpha+\beta)}$ v goniometrickém tvaru, a na druhé straně převeďte exponenciálu součtu na součin exponenciál, opět převeďte na goniometrický tvar a roznásobte, porovnáním reálných a imaginárních částí dostanete formuli jak pro cos, tak i pro sin.

      Hledané číslo pak objevíte tak, že pomocí nalezeného vzorce zjistíte, čemu se přesně rovná $\cos\frac{\pi}{12}$, dosadíte do vzorce pro argument a zjednodušíte. Tento argument má jakékoliv číslo $z = a + bi$, pro které platí $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

   (b) Získáte vhodnou úpravou pomocí formulí pro sin a cos z předchozího bodu (spíš cvičení na úpravu výrazu, než komplexku)

   (c) Napište si $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5$. Na jedné straně užijte Moivreovu větu a na druhé závorku natvrdo umocněte na 5. Podobně jako v prvním bodě získáte porovnáním reálných a imaginárních částí formule pro $\sin(5\alpha)$ i $\cos(5\alpha)$ (lze užít obecně pro jakékoliv přirozené číslo, nejen 5).

4. Zakreslete v Gaussově rovině množiny dané následujícími podmínkami:

   (a) Uzavřený kruh se středem v $1 - i$ a poloměrem $\sqrt{2}$ (tedy $\overline{\mathcal{U}(1-i, \sqrt{2})}$).

(b) Otevřený trojúhelník s vrcholy 0,1,1 + i.

(c) Přímka rovnoběžná s reálnou osou a procházející bodem $-i$ (tedy ekvivalentní podmínka by byla $\operatorname{Im} z = -1$).

(d) $\mathcal{U}(0,1)$ (tedy otevřený kruh se středem v 0 a poloměrem 1).

(e) Reálná osa bez bodu 1.

5. Vypočítejte:

(a) e^3

(b) 0

(c) $\cosh 3$

(d) $\ln 5 + i(\arccos \frac{3}{5} + 2k\pi) \approx 1.609 + i(0.927 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$

(e) $\ln(\cosh 7) + i\pi$

(f) $\mathrm{e}^{-2\pi+4k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$ (nebo ekvivalentně $\mathrm{e}^{-2\pi-4k\pi}$, s ohledem na $k \in \mathbb{Z}$ je to jedno)

(g) * $\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}+2l\pi}}, \quad k, l \in \mathbb{Z}$

6. Určete všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která platí:

(a) $z \in \{0, 1 \pm 2i\}$

(b) $z \in \{\pm\sqrt{2}, \pm i\sqrt{2}, 1 \pm i, -1 \pm i\}$

(c) $z = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$

(d) $z_1 = -i\ln(\sqrt{10} - 3) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad z_2 = -i\ln(\sqrt{10} + 3) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

(e) $z_1 = -i\ln(\sqrt{2} - 1) + 2k\pi, \quad z_2 = -i\ln(\sqrt{2} + 1) - \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

(f) * $z = -i\ln m + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

7. * Stačí si uvědomit, že $z^w = w$, a tedy $z = w^{\frac{1}{w}}$ a dosadit za w. Pro hlavní hodnoty mocnin dostáváme $z = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2\right)\right) \approx 1,719 + 0,383i$.

8. Určete reálnou a imaginární část funkce f a zjistěte, ve kterých bodech má f derivaci a kde je holomorfní, je-li:

(a) $u(x,y) = x^2 - y^2, \; v(x,y) = 2xy$, derivaci má a holomorfní je na celém $\mathbb{C}$.

(b) $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 3x^2 + 3y^2 + 1, \; v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 - 6xy$, derivaci má a holomorfní je na celém $\mathbb{C}$.

(c) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \; v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, derivaci má a holomorfní je na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(d) $u(x,y) = x^2 + y^2, \; v(x,y) = 2x$, derivaci má pouze v bodě $-i$, holomorfní není nikde.

(e) $u(x,y) = \mathrm{e}^x\cos(y+1), \; v(x,y) = \mathrm{e}^x\sin(y+1)$, derivaci má a holomorfní je na celém $\mathbb{C}$.

(f) $u(x,y) = \sin x \cosh y$, $v(x,y) = \cos x \sinh y$, derivaci má a holomorfní je na celém $\mathbb{C}$.

9. K zadané funkci u nebo v najděte druhou tak, aby byla funkce $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfní, platí-li:

   (a) $v(x,y) = 6x^2y - 2y^3 + 2$

   (b) $u(x,y) = \frac{x^4}{2} - 3x^2y^2 + \frac{y^4}{2} + x^2 - y^2$

   (c) $v(x,y) = \mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y)$

   (d) $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

   (e) $v(x,y) = \mathrm{e}^{x-y}\sin(x+y)$

   (f) $u(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy)$

10. *Dokažte následující vlastnosti lineárních lomených funkcí:

   (a) Dokáže se jednoduchým osamostatněním z z obecného předpisu.

   (b) Sestavením soustavy rovnic pro a, b, c, d s nulovou pravou stranou. Ověříme, že řádková hodnost matice je 3 $\Rightarrow$ všechny koeficienty a, b, c, d budou násobkem (jednoho) obecného parametru. Ten se tím pádem ve zlomku $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ zkrátí, funkce f je dána jednoznačně.

11. Najděte f-obraz množiny Ω, jestliže je zadáno:

   (a) $f(\Omega) = \left\{z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Re}\ z < -\frac{1}{2}\right\}$

   (b) $f(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Im}\ z < 1\}$

   (c) $f(\Omega) = \mathcal{U}(1,2)$

   (d) *$f(\Omega) = \left\{z \in \mathbb{C}: \ \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \ \wedge \ \mathrm{Re}\ z < \frac{1}{2} \ \wedge \ \mathrm{Im}\ z > 0\right\}$

12. Vhodným způsobem vypočítejte uvedené integrály:

   (a) 0

   (b) $-\frac{i+1}{3}$

   (c) $2\pi i$

   (d) $2\pi^2$

   (e) $\frac{\pi \mathrm{e} i}{4}$

   (f) $\frac{9\pi}{10}$

   (g) $1 + i$

   (h) -2

(i) $1 + \cos 1$

(j) $\ln \frac{5}{2}$

13. Určete obor konvergence dané mocninné řady:

(a) $\mathcal{U}(0, 1)$

(b) $\mathcal{U}(i, 1)$

(c) $\mathcal{U}(1 + i, 4)$

(d) $\mathbb{C}$

(e) $\mathcal{U}(-2, 1)$

14. *Určete součet řady:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{3^n(n+2)} = \frac{9}{4}(2 - \ln 3) \approx 2.028$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \pi^n (n-1)}{n!} = 1 - \pi i$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cosh n}{\mathrm{e}^{2n} n} = 4 - \ln\left[(\mathrm{e} - 1)(\mathrm{e}^3 - 1)\right] \approx 0.51$

(d) * $\frac{3}{4}$. **Nápověda:** Uvedený součin jistě konverguje (uměli byste zdůvodnit proč?), takže s ním lze provádět „prasárny“, jako např. jej převést pomocí vhodné funkce na součet (co dělá ze součinu součet, hmm?). Pak už je situace poměrně jednoduchá.

15. Určete ze zadaného částečného Fourierova rozvoje ω, T a první 4 členy amplitudového, resp. první 3 fázového spektra:

(a) $\omega = 2, T = \pi, A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 2\sqrt{2}, A_3 = 1, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = -\frac{\pi}{4}, \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$

(b) $\omega = \pi, T = 2, A_0 = 0, A_1 = 2, A_2 = 2\sqrt{2}, A_3 = 3, \varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \varphi_2 = -\frac{3\pi}{4}, \varphi_3 = 0$

(c) $\omega = 5, T = \frac{2\pi}{5}, A_0 = 3, A_1 = 0, A_2 = \sqrt{2}, A_3 = 2, \varphi_1 = \text{nedefinováno}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}, \varphi_3 = -\frac{\pi}{6}$

16. Nalezněte na daném oboru konvergence Laurentův rozvoj zadané funkce:

(a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+2)^n}{2^{n+1}}$

(b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$

(c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-3)^n}{7^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-3)^n}$

(d) $f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n}$

17. *Nechť f je holomorfní na $\mathbb{C}$ vyjma konečného množství izolovaných singularit. Dokažte, že

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{res}_{z=0} -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Z definice rezidua v nekonečnu s využitím vhodné substituce, pak už stačí dát si pozor na (všechna!) znaménka.

18. Vypočítejte následující rezidua:

   (a) 0
   (b) $\frac{1}{2}$
   (c) -1
   (d) $\frac{2}{3}$
   (e) *1

19. *Spočítejte

   (a) Laplaceovy transformace zadaných funkcí:
      i. $F(s) = \frac{2e^{-2s}+2s-1}{s^2}$
      ii. $F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$
      iii. $F(s) = \frac{1}{s}e^{\frac{s^2}{4}}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{s}{2}\right)\right)$ [41]
   (b) následující integrály pomocí Laplaceovy transformace:
      i. 1
      ii. $\frac{1}{2}$
      iii. $\frac{2}{5}$ [42]

20. Pomocí Laplaceovy transformace vyřešte zadané Cauchyovy úlohy:

   (a) $y(x) = x^3 + x^2 + x + 6$
   (b) $y(x) = e^{4x} + e^{-3x} - 1$
   (c) $y(x) = x^2e^{2x}$
   (d) $y(x) = x\cos x + 1$
   (e) $y(x) = 4 - x - xe^{2-2x}$
   (f) $y(x) = \begin{cases} 2e^{2x} + 2e^{-2x} - 4, & 0 \le x < 1, \\ 2e^{2x} + 2e^{-2x} - 3e^{2x-2} - 3e^{2-2x} + 2, & 1 \le x < 2, \\ 2e^{2x} + 2e^{-2x} - 3e^{2x-2} - 3e^{2-2x} + e^{2x-4} + e^{4-2x}, & x \ge 2 \end{cases}$

[41] Užitím pravidla $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right\} = \frac{F(s)}{s}$ a zbytek z definice s pomocí doplnění na čtverec.
[42] Pomocí substituce $u = \tan t$ vznikne „klasický“ Laplaceovský integrál.

C Nahodilé hnusy strýčka příhody

- V roce 2018, kdy jsem (nejen tento předmět) učil poprvé, se mi „povedlo“ na cvičení spáchat jednu nemilou věc. I tehdy jsem měl občas hloupý zlozvyk, vymýšlet si příklady rovnou u tabule z hlavy. Inu, u některých témat to lze, zvlášť, když už je má člověk v oku. Ale nalezení koeficientů lineární lomené funkce, zvlášť se zpětným přihlédnutím k faktu, že tento typ příkladů v oku nemám dodnes, se záhy ukázalo jako vydatný rozběh hlavou proti zdi. Princip příkladu byl stále stejný, jen výpočet nevycházel hezky, a zpětně nutno dodat, že ani to nebylo zase až tak strašné a příklad by šel bez kaněk na svědomí zadat třeba jako domácí úkol nebo jako příklad u zkoušky. Nicméně tehdy svým momentem překvapení úspěšně pohřbil závěr cvičení a soudě dle pohledů auditoria, málem i pár studentů. Rozhodl jsem se jej tedy jen tak pro legraci zařadit sem. Původně jsem jej chtěl dát jako hvězdičkový příklad k procvičení mezi ostatní, ale jelikož má samostatnou historku se studenty, nakonec jsem jej uvedl řešený zde, v příloze. Budoucím generacím pro zajímavost/pobavení a sobě jako takové milé malé *memento mori*:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad f(0) = -i,\ f(2) = -9i,\ f(i) = -2-3i$$

$$a, b, c, d = ?$$

$$-i = f(0) = \frac{0+b}{0+d} \quad \Rightarrow \quad b + id = 0 \tag{1}$$

$$-9i = f(2) = \frac{2a+b}{2c+d} \quad \Rightarrow \quad -9i(2c+d) = 2a+b$$

$$\Rightarrow \quad 2a + b + 18ic + 9id = 0 \tag{2}$$

$$-2-3i = f(i) = \frac{ai+b}{ci+d} \quad \Rightarrow \quad (-2-3i)(ci+d) = ai+b$$

$$\Rightarrow \quad ai + b + (-3+2i)c + (2+3i)d = 0 \tag{3}$$

Soustavu můžeme řešit maticově:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 18i & 9i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 \\ i & 1 & -3+2i & 2+3i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 18i & 9i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 2-i & 12+4i & 13+6i & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 18i & 9i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 12+4i & 12+4i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 18i & 9i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} b + id &= 0 \quad \Rightarrow \quad b = -id \\ c + d &= 0 \quad \Rightarrow \quad c = -d \\ 2a + b + 18ic + 9id &= 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}(id + 18id - 9id) = 5id \end{aligned}$$

Volbou $d = 1$ dostáváme

$$a = 5i,\ b = -i,\ c = -1,\ d = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{f(z) = \frac{5iz - i}{-z + 1}}}$$

- Jářku, aby toho nebylo málo, v roce 2020, v době vynucené distanční výuky, což mi možná budiž omluvou, se mi povedl podobný kousek, tentokráte s „jednoduchou“ rovnicí. Zadání v tomto případě ještě více klamalo svou nevinností, aby se dostavil výpočet o poznání odpornější. Opět, v principu nic složitého, ale ten průběh a v tomto případě i výsledek je kvalitní galimatyáš. A jestliže příklad výše byl ve své podstatě vlastně neškodný, toto už je vpravdě neúmyslná pomsta studentovi. Naštěstí se mi vybavil PTSD z onoho prvního incidentu a úsilí jsem po pár minutách vzdal de facto po vyřešení poloviny příkladu, ať může cvičení přejít k produktivnější činnosti. I tento kus tedy přikládám, když už tato příloha existuje:

  $\sinh z = 3 + 2i, \quad z = \,?$ (a tím se myslí VŠECHNA taková z)

$$
\begin{aligned}
\tfrac{e^z - e^{-z}}{2} &= 3+2i \\
e^z - e^{-z} &= 6+4i \qquad \Big/ \cdot w, \quad (w = e^z) \\
w^2 - 1 &= (6+4i)w \\
w^2 - (6+4i)w - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Potud v pohodě. Pojďme dál:

$$
w_{1,2} = \frac{-(-(6+4i)) \pm \sqrt{(-(6+4i))^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = \frac{6+4i \pm \sqrt{36+48i-16+4}}{2} =
$$

$$
= \frac{6+4i \pm 2\sqrt{6+12i}}{2} = 3+2i \pm \sqrt{6+12i}
$$

Zatím stále v pohodě, ale nebojte se, bude to jen horší. Teď bychom potřebovali zjistit, čemu se rovná $\sqrt{6+12i}$:

$$
\sqrt{6+12i} = \sqrt{|6+12i|}\cdot\left(\cos\frac{\arg(6+12i)+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\arg(6+12i)+2k\pi}{2}\right), \quad k \in \{0,1\}
$$

$$
\text{Pomocné: } |6+12i| = \sqrt{6^2+12^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}, \quad \arg(6+12i) = \arctan\frac{12}{6} = \arctan 2,
$$

$$
\sqrt{6+12i} = \sqrt{6\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{\arctan 2}{2} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\arctan 2}{2} + k\pi\right)\right), \quad k \in \{0,1\}
$$

No dobře, tohle úplně hezky nevypadá, ale tak w máme! A dokonce ani nebudou 4. Proč? Neboť $\pm$ v řešení kvadratické rovnice už počítá s tím, že druhá odmocnina má dvě řešení (a tato se liší znaménkem), což přesně koresponduje s tím, že platí $\sin(z+\pi) = -\sin z$, totéž pro cos. Každopádně:

$$
w_1 = 3+2i+\sqrt{6\sqrt{5}}\left(\cos\frac{\arctan 2}{2} + i\sin\frac{\arctan 2}{2}\right),
$$

$$
w_2 = 3+2i-\sqrt{6\sqrt{5}}\left(\cos\frac{\arctan 2}{2} + i\sin\frac{\arctan 2}{2}\right)
$$

To přece nebylo tak strašné, nebo ano? Jo aha, my jsme chtěli z, takže ještě každé to w

prohnat logaritmem... :

$$z_1 = \mathrm{Ln}\ w_1 = \ln|w_1| + i(\arg w_1 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Re}\ w_1 = 3 + \sqrt{6\sqrt{5}}\cos\frac{\arctan 2}{2} > 0, \quad \mathrm{Im}\ w_1 = 2 + \sqrt{6\sqrt{5}}\sin\frac{\arctan 2}{2} > 0,$$

$$|w_1| = \sqrt{\left(3 + \sqrt{6\sqrt{5}}\cos\frac{\arctan 2}{2}\right)^2 + \left(2 + \sqrt{6\sqrt{5}}\sin\frac{\arctan 2}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{13 + \sqrt{6\sqrt{5}}\left(6\cos\frac{\arctan 2}{2} + 4\sin\frac{\arctan 2}{2}\right) + 6\sqrt{5}},$$

$$\arg w_1 = \arctan\frac{2 + \sqrt{6\sqrt{5}}\sin\frac{\arctan 2}{2}}{3 + \sqrt{6\sqrt{5}}\cos\frac{\arctan 2}{2}},$$

$$\underline{\underline{z_1 = \ln\sqrt{13 + \sqrt{6\sqrt{5}}\left(6\cos\frac{\arctan 2}{2} + 4\sin\frac{\arctan 2}{2}\right) + 6\sqrt{5}} +}}$$

$$\underline{\underline{+\ i\arctan\frac{2 + \sqrt{6\sqrt{5}}\sin\frac{\arctan 2}{2}}{3 + \sqrt{6\sqrt{5}}\cos\frac{\arctan 2}{2}} + 2k\pi i \approx 1{,}9834 + 0{,}5707i + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}}}$$

Zájemci si jistě druhé řešení dopočítají sami, toto už je naštěstí analogicky, jediná drobná zrada může nastat u argumentu, neboť tentokrát je reálná část záporná. Ale... fuj.

Á propos, pokud si ještě správně pamatuji, u onoho prvního příkladu z r. 2018 jsem prostě jen něco nasázel s tím, že se uvidí. U tohoto příkladu jsem do něj šel v dobré víře, že „mi to v hlavě sedí" a „myslím, že to vyjde pěkně". Inu, další potvrzení toho, že méně je někdy více a někteří lidé by se příliš často neměli dopouštět pokusů o přemýšlení.

- Mimochodem, pokud by někdo chtěl namítnout, že některé příklady k procvičení z přílohy B.1, zvlášť ty s hvězdičkou, jsou místy také pěkný hnus, máte pravdu. Ale je jich jen několik, většinou aspoň hezky vyjdou a především se jedná o vědomý a cílený hnus pro gurmány, nikoliv o něco, co mělo býti běžným „vzorovým" příkladem pro každého.
- Je možné, že v budoucnu, pokud opětovně spáchám něco podobného (o tom nepochybuji) a vydrží mi sebereflexe, tj. stejné nadšení, práskat na sebe, jaký jsem idiot (o tom už možná pochybovat lze), přibudou další podobné lahůdky a počet varovných prstů tak nadále poroste. Snad to do doby, než přestanu tento předmět učit, nedotáhnu na stonožku.