

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 1

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0, \\x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1, \\3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 0\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([2, 1, 0]) &= [1, -1], \\ \mathcal{A}([2, 2, 1]) &= [-1, 2], \\ \mathcal{A}([-1, -1, -1]) &= [2, -1].\end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -1, \\x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\x_2 - x_4 &= 3, \\x_3 - x_4 &= 2.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 2

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 2x_4 &= -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 &= 5, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 12x_4 &= -3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4 &= 3. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}(Au + Bv)$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 6 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned} U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0 \wedge x + y - 1 = 0\}, \\ V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \wedge 2x + y - z = 0\}. \end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \mapsto \mathbb{R}^2$  ( $\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ ) je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(-2x^2 + x + 2) &= [1, 1], \\ \mathcal{A}(-2x^2 + 1) &= [-1, -2], \\ \mathcal{A}(-x^2 + x + 1) &= [-2, -5]. \end{aligned}$$

Nalezněte všechny vzory vektoru  $[1, 3]$ .

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 0, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 0], \quad \mathbf{f}_3 = [0, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} -2x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 4, \\ -2x_1 + x_3 - x_4 &= -4. \end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 3

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 &= -6, \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -4. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A(A^{-1} + B^{-1})u$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \\ -7 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathcal{P}_3$  ( $\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ ), kde

$$\begin{aligned} U &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = a_1\}, \\ V &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = a_0^2\}. \end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([2, -2, -1]) &= [1, 1], \\ \mathcal{A}([1, -1, -1]) &= [-1, -2], \\ \mathcal{A}([-3, 2, 0]) &= [2, 1]. \end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 0, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 3x_3 + 2x_4 &= 19, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 12. \end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 4

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 26,$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28,$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26.$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A(A^{-1}u + Bu)$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = y\},$$
$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}.$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\mathcal{A}([1, 1, 0]) = [1, 0, 1],$$

$$\mathcal{A}([0, 1, 1]) = [1, 1, 1],$$

$$\mathcal{A}([0, 0, 1]) = [1, 0, 0].$$

Nalezněte obraz vektoru  $[1, 2, 3]$ .

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 4,$$

$$3x_1 + x_4 = 8,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8,$$

$$x_2 + 2x_3 = 0.$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 5

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 11, \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 14, \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 16.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $(A + B^2)B^{-1}u$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : y = z\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq 3\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 1, 2]) &= [1, 1, 0], \\ \mathcal{A}([2, 0, 1]) &= [0, 1, 1], \\ \mathcal{A}([1, 0, 0]) &= [1, 0, 1].\end{aligned}$$

Nalezněte vektor  $[6, 5, 5]$ .

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [2, -1, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [-1, 2, -1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, -1, 2]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_4 &= 3, \\ 3x_1 + x_4 &= -3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -1, \\ x_2 + 2x_3 &= 0.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 6

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7, \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 11, \\x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}(AB + AB^{-1})Bu$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = z\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > -x^2 - y^2 - z^2\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 2, 2]) &= [1, 0, 0], \\ \mathcal{A}([2, 3, 3]) &= [1, 1, 0], \\ \mathcal{A}([2, 3, 4]) &= [1, 1, 1].\end{aligned}$$

Nalezněte obraz vektoru  $[7, 11, 12]$ .

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [2, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [3, 2, 0]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\3x_1 + x_4 &= 4, \\x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4, \\x_2 + 2x_3 &= 0.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 7

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + x_4 &= 3, \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned} U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = -3y + 1\}, \\ V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = -y \wedge 2x - 4z = -6y \wedge y + 2z = x\}. \end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([1, 0, 1]) &= [1, 2], \\ \mathcal{A}([0, 0, 1]) &= [0, 1], \\ \mathcal{A}([1, 2, 0]) &= [3, -2]. \end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + x_4 &= 3, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0, \\ -2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 8

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + x_4 &= 3, \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned} U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \wedge 3y + z = -x \wedge y + 2z = x\}, \\ V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = -2y - 3z \wedge x - 4z = -3y \wedge y = x\}. \end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([1, 0, 2]) &= [2, -1], \\ \mathcal{A}([0, 1, 1]) &= [1, 1], \\ \mathcal{A}([1, 2, 2]) &= [1, 2]. \end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [2, -1, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [-1, 2, -1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, -1, 2]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + x_4 &= 3, \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0, \\ -2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$



## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 9

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_4 &= 1, \\x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= -2, \\x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0, \\2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = 2y + z \wedge y + 2z = -2x \wedge y + z = -x\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = z \wedge x + y = -2z \wedge 5z = -x - 2y\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 0, 0]) &= [1, 0], \\ \mathcal{A}([1, 1, 0]) &= [0, 1], \\ \mathcal{A}([1, 1, 1]) &= [1, 1].\end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [2, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [3, 2, 0]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}2x_1 + x_3 &= 3, \\2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1, \\x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2, \\x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 10

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 1, \\2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2, \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\-x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $C^{-1}Au + C^{-1}Bu$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathcal{P}_3$  ( $\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ ), kde

$$\begin{aligned}U &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = 2k \wedge a_1 = 0 \wedge a_0 = 2l, k, l \in \mathbb{Z}\}, \\V &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : 2a_2 + 2a_1 + 2a_0 = 1\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([-1, 0, 3]) &= [1, 0, 1], \\ \mathcal{A}([2, 1, 2]) &= [2, 1, 1], \\ \mathcal{A}([1, -1, -3]) &= [0, 1, -1].\end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 - x_4 &= 2, \\x_2 - x_3 &= 1, \\-x_3 + x_4 &= 0, \\-x_1 + 2x_3 - x_4 &= 1.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 11

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2, \\2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1, \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}C^T u - 2A^{-1}B^T u$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathcal{P}_3$  ( $\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ ), kde

$$\begin{aligned}U &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = 2k + 1 \wedge a_1 = 2l + 1 \wedge a_0 = 0, k, l \in \mathbb{Z}\}, \\V &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_1 + 2a_2 + 2a_0 = 0\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([-1, 0, 3]) &= [1, 0, 1], \\ \mathcal{A}([2, 1, 2]) &= [2, 1, 1], \\ \mathcal{A}([1, -1, -3]) &= [0, 1, -1].\end{aligned}$$

Nalezněte obor hodnot zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, -1, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, -1], \quad \mathbf{f}_3 = [-1, 0, 2]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 - x_4 &= -1, \\4x_2 - x_3 &= 0, \\-x_3 + x_4 &= -1, \\x_1 - 2x_3 + x_4 &= 0.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 12

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 1, \\3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3, \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\-x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $2B^{-1}Au - B^{-1}Av$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + z = 0\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \wedge y + z = 1\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([-1, 0, 3]) &= [1, 0, 1], \\ \mathcal{A}([2, 1, 2]) &= [2, 1, 1], \\ \mathcal{A}([1, -1, -3]) &= [0, 1, -1].\end{aligned}$$

Nalezněte obraz vektoru  $[5, 3, 1]$ .

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 0, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 - x_4 &= 0, \\ -4x_2 + x_3 &= 3, \\ x_3 - x_4 &= -1, \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 &= 1.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 13

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned} U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}, \\ V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 1\}. \end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([1, 0, 1]) &= [1, 0], \\ \mathcal{A}([0, 1, 1]) &= [1, 1], \\ \mathcal{A}([0, -1, 1]) &= [0, 2]. \end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [2, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [3, 2, 0]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ x_3 + x_4 &= 7 \\ -x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 14

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_4 &= -1 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -2 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= -2 \\x_3 + x_4 &= 0.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, 3] \in \mathbb{R}^3\}, \\V &= \{[x, y, 0] \in \mathbb{R}^3\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 0, 1]) &= [1, 1, 1], \\ \mathcal{A}([0, 1, 1]) &= [1, 1, -1], \\ \mathcal{A}([0, -1, 1]) &= [0, 0, 4].\end{aligned}$$

Nalezněte obor hodnot tohoto zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\x_3 + x_4 &= 3 \\-x_3 + x_4 &= -1.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 15

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= 2 \\x_3 + x_4 &= -1.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 0, 1]) &= [1, 1, 1], \\ \mathcal{A}([0, 1, 1]) &= [1, 1, -1], \\ \mathcal{A}([0, -1, 1]) &= [0, 0, 4].\end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [-2, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [-1, 0, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, 1, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 15 \\-x_3 + x_4 &= -1.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 16

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + 17x_3 + 7x_4 &= 21, \\x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\-x_1 - x_2 - 9x_3 - 4x_4 &= -11, \\-x_1 - 8x_3 - 3x_4 &= -10.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x < y < z\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 1, 0]) &= [1, 2], \\ \mathcal{A}([1, 1, 1]) &= [-1, 1], \\ \mathcal{A}([0, 1, 0]) &= [2, -1].\end{aligned}$$

Nalezněte obraz vektoru  $[2, -2, 1]$ .

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, -2, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [-1, 0, -1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, 1, -1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -8, \\2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -4, \\x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -2.\end{aligned}$$



## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 17

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}4x_1 - 2x_2 + 8x_3 - x_4 &= 3, \\x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0, \\x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -1.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu - A^{-1}Bv$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0, x + y = 0\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y = 0\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([2, -1, 0]) &= [0, 2, 1], \\ \mathcal{A}([0, -2, -1]) &= [3, 3, 1], \\ \mathcal{A}([-1, -1, -1]) &= [1, 4, 2].\end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, -2], \quad \mathbf{f}_2 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, -1, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 2, \\x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -6, \\x_1 + 2x_3 + 4x_4 &= 13, \\2x_2 + x_3 - x_4 &= -5.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 18

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 1x_3 + x_4 &= 15, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}(B + C)u - A^{-1}Cu$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 9 \\ -9 & 6 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathcal{P}_3$  ( $\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ ), kde

$$\begin{aligned}U &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \wedge 2a_2 + a_1 = 0\}, \\ V &= \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : p(0) < p(1)\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 1, 0]) &= [1, 2, 1], \\ \mathcal{A}([0, 1, 1]) &= [1, 1, 0], \\ \mathcal{A}([1, 0, 1]) &= [0, 1, 1].\end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [-1, 0, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, 1, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 19

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= -17, \\x_1 - x_2 + 3x_4 &= 6, \\3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= -7, \\5x_1 - 2x_2 + x_3 &= -11.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathcal{P}_3$  ( $\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ ), kde

$$\begin{aligned}U &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_1 = 1\}, \\V &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_1 = 0\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 1, 0]) &= [1, -1], \\ \mathcal{A}([-2, 2, 1]) &= [-1, 2], \\ \mathcal{A}([-1, 1, -1]) &= [1, 0].\end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [1, 0, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -7, \\x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 9, \\x_2 - x_4 &= -1, \\x_3 + x_4 &= 2.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 20

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7, \\x_1 - x_2 + 3x_4 &= 12, \\3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= -7, \\5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 22.\end{aligned}$$

2. Vypočtete hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathcal{P}_3$  ( $\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ ), kde

$$\begin{aligned}U &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = 1\}, \\V &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = 0\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 1, 0]) &= [2, -2], \\ \mathcal{A}([-2, 2, 1]) &= [-1, 3], \\ \mathcal{A}([-1, 1, -1]) &= [1, 1].\end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [-2, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [1, 0, -1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, 1, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 7, \\x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -9, \\x_2 - x_4 &= 1, \\x_3 + x_4 &= -2.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 21

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0, \\x_1 - x_2 + 3x_4 &= 13, \\3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= -12, \\5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 15.\end{aligned}$$

2. Vypočtete hodnotu výrazu  $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathcal{P}_3$  ( $\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ ), kde

$$\begin{aligned}U &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_0 = 1\}, \\V &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 : a_0 = 0\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 1, 0]) &= [3, -2], \\ \mathcal{A}([-2, 2, 1]) &= [-1, 1], \\ \mathcal{A}([-1, 1, -1]) &= [2, -1].\end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, -2, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [-1, 0, -1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, 1, 0]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -5, \\x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 6, \\x_2 - x_4 &= -2, \\x_3 + x_4 &= 4.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 22

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -3, \\3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= 10, \\x_1 + x_2 &= 3, \\2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $A(A^{-1}B + BA^{-1})Au$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 7 & 8 \\ 2 & -8 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = y = z \wedge x \geq 0\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = y = z \wedge x^2 \geq 0\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 1, -1]) &= [1, 2, 1], \\ \mathcal{A}([2, 3, 1]) &= [-1, 0, 1], \\ \mathcal{A}([0, 0, -1]) &= [1, 1, 0].\end{aligned}$$

Nalezněte obor hodnot zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, -2], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 0, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, -1, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}3x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5, \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 5.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 23

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6, \\-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\2x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= -3, \\4x_1 - x_2 - 2x_4 &= -1.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $(BA + A^{-1}A)A^{-1}u$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \\ -2 & 4 & -11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 0\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 0\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, 1, 2]) &= [1, 1, 1], \\ \mathcal{A}([-2, 1, 3]) &= [3, -1, 2], \\ \mathcal{A}([0, 3, 1]) &= [0, 0, 1].\end{aligned}$$

Nalezněte všechny vzory vektoru  $[2, -2, 3]$ .

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [-2, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [0, -1, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\-x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -1, \\3x_1 + x_2 &= 5, \\-x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0.\end{aligned}$$

## Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 24

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5, \\3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -1, \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -1, \\-x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3.\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu  $ABu + AB^{-1}u$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -5 & -9 \\ -1 & -3 & -6 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny  $U$  a  $V$  vektorové podprostory vektorového prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde

$$\begin{aligned}U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 6x - 6y + z = 0 \wedge x + y + z = 0\}, \\V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 6x - 6y + z = 12 \wedge x + y + z = 1\}.\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([1, -1, -1]) &= [-2, 2], \\ \mathcal{A}([0, 3, 5]) &= [14, -3], \\ \mathcal{A}([1, 0, 0]) &= [2, 1].\end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [1, 0, 0], \quad \mathbf{f}_3 = [1, 2, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -2, \\x_2 - x_3 + x_4 &= -2, \\x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4, \\-x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2.\end{aligned}$$