ANALYTICKÁ GEOMETRIE V PROSTORU

13. přednáška

Vektorová algebra

Pravoúhlé souřadnice bodu v prostoru

Poloha bodu v prostoru je vzhledem ke třem osám k sobě kolmým určena třemi souřadnicemi, které tvoří uspořádanou trojici reálných čísel.
Bod *A* je určen jednoznačně trojicí reálných čísel a_1, a_2, a_3. Píšeme $A = [a_1, a_2, a_3]$.

Vzdálenost dvou bodů

Mějme v prostoru dány dva body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$. Vzdáleností dvou bodů nazveme velikost úsečky *AB* a vypočteme ji podle vztahu:

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\,.$$

Vektory v prostoru

Definice:
Je-li vektor $\bar{\boldsymbol{a}}$ v prostoru určen orientovanou úsečkou *AB*, kde $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, nazývají se čísla $\bar{\boldsymbol{a}}_1 = b_1 - a_1$, $\bar{\boldsymbol{a}}_2 = b_2 - a_2$, $\bar{\boldsymbol{a}}_3 = b_3 - a_3$, souřadnice vektoru $\bar{\boldsymbol{a}}$.

Velikostí vektoru $\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{AB}$ nazýváme délku úsečky *AB* a značíme ji $|\bar{\boldsymbol{a}}|$ nebo $|\overline{AB}|$.

Nulovým vektorem nazýváme vektor, jehož počáteční a koncový bod splývají, takže jeho velikost se rovná nule. Značíme jej $\bar{\boldsymbol{o}}$.
Jednotkovým vektorem nazýváme vektor, který má velikost rovnu jedné.

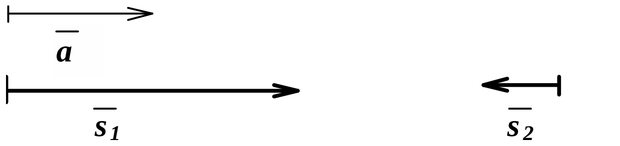
Rovnost vektorů

Říkáme, že vektor $\bar{\boldsymbol{a}}$ se rovná vektoru $\bar{\boldsymbol{b}}$ (píšeme $\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{b}}$), jestliže pro ně zároveň platí:
a) mají stejnou velikost, tedy $|\bar{\boldsymbol{a}}| = |\bar{\boldsymbol{b}}|$;
b) jsou souhlasně orientované.

Operace s vektory

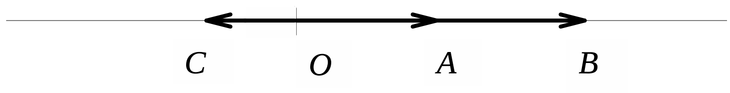
Násobení vektoru reálným číslem

Součinem vektoru $\bar{\boldsymbol{a}}$ a kladného čísla c je vektor $\bar{\boldsymbol{s}}$, který má stejný směr a orientaci a pro jehož velikost platí $|\bar{\boldsymbol{s}}| = c|\bar{\boldsymbol{a}}|$.



$\bar{\boldsymbol{s}}_1 = 2\bar{\boldsymbol{a}}$ $\qquad$ $\bar{\boldsymbol{s}}_2 = -\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{a}}$

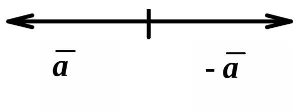
Násobky vektorů můžeme znázornit na jedné přímce tak, aby měly společný počáteční bod *O*.



$\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{OA}$, $\bar{\boldsymbol{s}}_1 = \overline{OB}$, $\bar{\boldsymbol{s}}_2 = \overline{OC}$

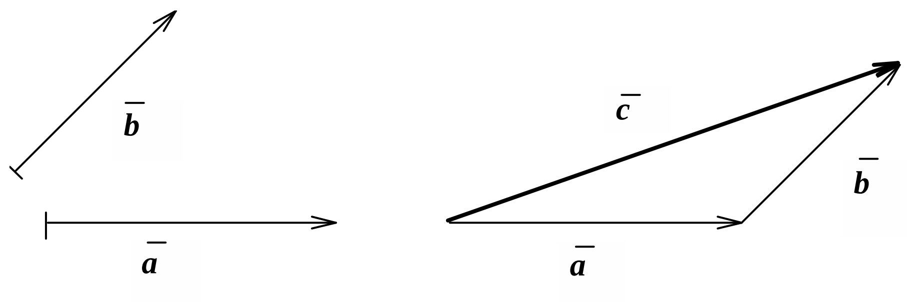
Vektory $\bar{\boldsymbol{a}}$ a $c\bar{\boldsymbol{a}}$ se nazývají *rovnoběžné (kolineární vektory).*

Vynásobíme-li vektor $\bar{\boldsymbol{a}}$ číslem -1 dostaneme *opačný vektor.*



Součet vektorů

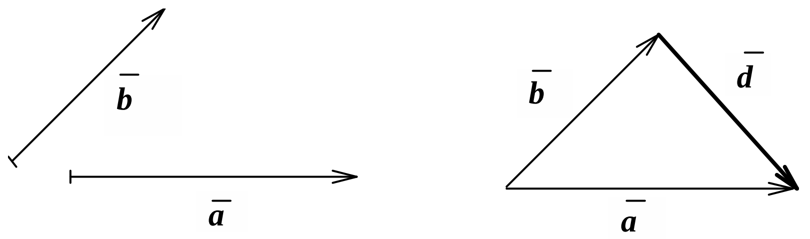
Součtem dvou nekolineárních vektorů $\bar{\boldsymbol{a}}$ a $\bar{\boldsymbol{b}}$ je vektor $\bar{\boldsymbol{c}}$, který geometricky definujeme:



Píšeme $\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{c}}$.

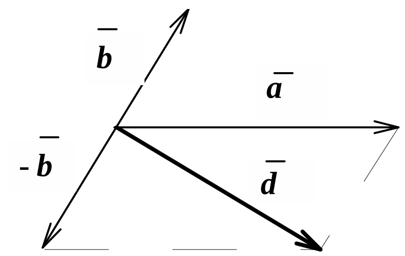
Rozdíl vektorů

Rozdílem dvou nekolineárních vektorů $\bar{\boldsymbol{a}}$ a $\bar{\boldsymbol{b}}$ je vektor $\bar{\boldsymbol{d}}$, který geometricky definujeme:

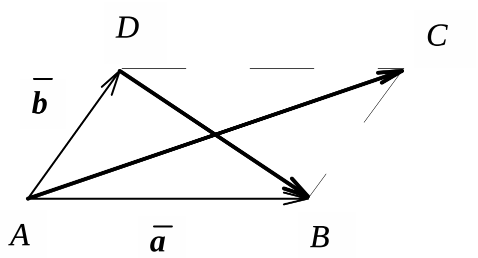


Píšeme $\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{d}}$.

Odečítání vektorů můžeme nahradit přičítáním opačného vektoru
$\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{a}} + (-\bar{\boldsymbol{b}}) = \bar{\boldsymbol{d}}$.



Z těchto definic je zřejmé, že sestrojíme-li z vektorů $\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$ rovnoběžník *ABCD*, pak orientovaná úhlopříčka $\overline{AC}$ představuje vektor $\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}}$ a úhlopříčka $\overline{DB}$ vektor $\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}}$.



Skalární součin

Umíme sčítat a odečítat vektory, násobit je reálným číslem i vypočítat jejich velikost. Další operace, kterou si zavedeme, se nazývá skalární součin a umožní nám násobit vektory mezi sebou.

Definice:

Skalárním součinem $\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}}$ dvou nenulových vektorů $\overline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{b}}$ v prostoru je *číslo,* pro které platí:
$\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}} = |\overline{\boldsymbol{a}}||\overline{\boldsymbol{b}}|\cos\varphi$, kde φ je úhel vektorů $\overline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{b}}$.

Jestliže jeden z vektorů $\overline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{b}}$ je nulový, definujeme: $\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}} = 0$.

Věta:

Jsou-li vektory $\overline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{b}}$ dány svými souřadnicemi $\overline{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$, pak pro ně platí:

$\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$,

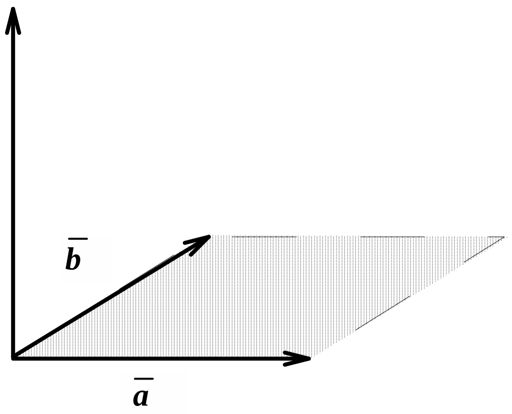
$$\cos\varphi = \frac{\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}}}{|\overline{\boldsymbol{a}}||\overline{\boldsymbol{b}}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Z této věty plynou vlastnosti skalárního součinu:

1) $\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}} = \overline{\boldsymbol{b}} \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$ komutativní zákon,

2) $\overline{\boldsymbol{a}} \cdot (\overline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{c}}) = \overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{c}}$ distributivní zákon,

3) dva vektory $\overline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{b}}$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když jejich skalární součin je roven nule.



Vektorový součin

Vektorový součin je další operace s vektory. Už víme, že výsledek skalárního součinu dvou vektorů je číslo, výsledkem vektorového součinu je vektor. Narozdíl od skalárního součinu, je vektorový součin definován jen pro vektory v prostoru.

Kromě toho, že pomocí vektorového součinu určíme vektor kolmý na oba původní vektory (čehož využijeme například při určování obecné rovnice roviny), můžeme také spočítat obsah rovnoběžníku daného původními vektory: `S=|u × v|`.

Definice:

a) Pro souřadnice vektorového součinu $\boldsymbol{w}$ vektorů $\bar{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ platí:

$$\boldsymbol{w} = \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

b) výpočet pomocí determinantu:

$$\boldsymbol{w} = \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Dva nenulové vektory $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}$ jsou rovnoběžné právě tehdy, když jejich vektorový součin je nulový vektor.
Pro vektorový součin neplatí komutativní zákon (z vlastnosti determinantu o záměně řádků), platí ale $\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}} = -(\bar{\boldsymbol{b}} \times \bar{\boldsymbol{a}})$.

Fyzikální význam vektorového součinu:

Vektor $\boldsymbol{M}$ momentu síly $\boldsymbol{f}$, působící v bodě B vzhledem k bodu A je vektorový součin $\boldsymbol{M} = \overline{AB} \times \bar{\boldsymbol{f}}$, moment síly je velikost tohoto vektoru $|\bar{M}|$.

Příklad: Vypočtěte obsah trojúhelníka daného body $A = [1,2,3]$, $B = [0,-1,2]$, $C = [2,1,3]$.

Řešení: Dané tři body *A, B, C* určují dva vektory. Velikost jejich vektorového součinu udává obsah rovnoběžníka, který je z nich sestrojený. Trojúhelník ABC má obsah poloviční, tedy $S = \frac{1}{2}|\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}|$.

Určíme souřadnice vektorů $\bar{\boldsymbol{a}}, \bar{\boldsymbol{b}}$:

$\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{AB} = B - A = (-1,-3,-1)$,

$\bar{\boldsymbol{b}} = \overline{AC} = C - A = (1,-1,0)$.

Vypočítáme souřadnice vektorového součinu pomocí determinantu:

$$\begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{\mathbf{i}} - \bar{\mathbf{j}} + 4\bar{\mathbf{k}}, \quad \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = (1,-1,4).$$

Tedy obsah je $S = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+16} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Smíšený součin

Spojení vektorového a skalárního součinu se nazývá smíšený součin. Smíšený součin je stejně jako vektorový součin definován pouze v prostoru.

Definice:

Smíšeným součinem tří vektorů $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ nazýváme číslo $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Jestliže jsou dány vektory $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$, pak smíšený součin vypočteme podle věty:

Věta:

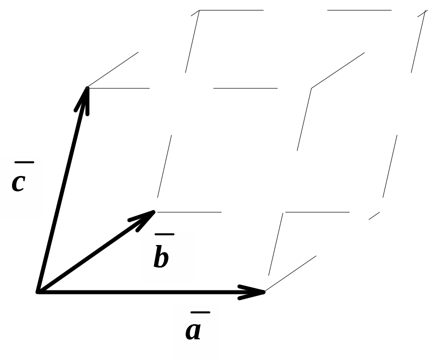
Jsou-li dány vektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, pak je

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

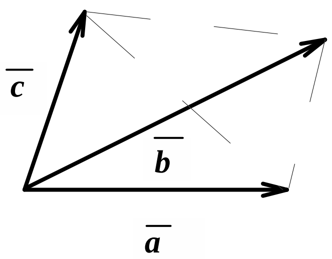
Geometrický význam smíšeného součinu.

1. Tři vektory jsou komplanární (leží v jedné rovině) právě tehdy, když jejich smíšený součin $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ je nula.

2. Absolutní hodnota smíšeného součinu $\left| \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \right|$ nekomplanárních vektorů $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu sestrojeného z těchto vektorů. Šestina tohoto čísla je objem čtyřstěnu určeného vektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.



$P = \bar{a} \cdot \left| \bar{b} \times \bar{c} \right|$



$P = \frac{1}{6} \bar{a} \cdot \left| \bar{b} \times \bar{c} \right|$

Fyzikální význam smíšeného součinu:

Objemový tok Q kapaliny proudící konstantní rychlostí $\bar{v}$ otvorem, který je ve tvaru rovnoběžníka určeného vektory $\bar{a}, \bar{b}$ se rovná smíšenému součinu vektorů $\bar{a}, \bar{b}, \bar{v}$, takže je $Q = \left| \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{v}) \right|$.

Příklad: Určete objem čtyřstěnu, který je dán vrcholy $A = [2,0,3]$, $B = [0,3,3]$, $C = [0,0,9]$, $D = [2,3,11]$.

Řešení: Čtyřstěn je určen například vektory $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Určíme jejich souřadnice a smíšený součin.

$\overline{AB} = (-2,3,0)$,
$\overline{AC} = (-2,0,6)$,

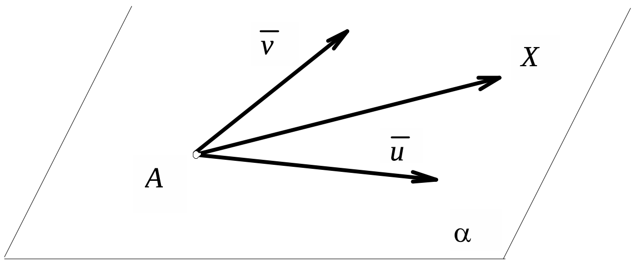
$\overline{AD} = (0,3,8)$,

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 36 + 48 = 84 .$$

Objem čtyřstěnu je $\mathrm{V} = \frac{1}{6}.84 = 14$.

Rovina

Rovina je dána třemi nekolineárními (neleží v jedné přímce) body *A*, *B*, *C*. Tyto body určují dva vektory $\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{AB}$, $\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{AC}$, které nazýváme *směrovými vektory*.



Dále může být určena dvěma různými přímkami (nejsou mimoběžné) nebo bodem a dvěma různými vektory, z nichž jeden není reálným násobkem druhého.
Zavedeme si dvě různá vyjádření roviny v prostoru - parametrické vyjádření a později obecnou rovnici roviny.

Zvolíme v rovině α libovolný bod *X*. Vektor $\overline{AX}$ ležící v dané rovině a směrové vektory $\overline{\boldsymbol{u}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}$ jsou lineárně závislé, tedy jeden z nich můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících dvou:
$\overline{AX} = t_1\overline{\boldsymbol{u}} + t_2\overline{\boldsymbol{v}}$, kde t_1, t_2 jsou libovolná reálná čísla.
Rovnici přepíšeme
$X - A = t_1\overline{\boldsymbol{u}} + t_2\overline{\boldsymbol{v}}$,
$X = A + t_1\overline{\boldsymbol{u}} + t_2\overline{\boldsymbol{v}}$.

Definice:

Rovnici $X = A + t_1\overline{\boldsymbol{u}} + t_2\overline{\boldsymbol{v}}$, kde $t_1, t_2 \in R$ nazýváme *vektorovou rovnicí roviny* *ABC*.

Předpokládejme, že je dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$, vektory $\overline{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overline{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ a bod $X = [x, y, z]$. Souřadnice těchto útvarů dosadíme do vektorové rovnice a dostaneme tři rovnice.

Definice:

Rovnice

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t_1 u_1 + t_2 v_1 \\ y &= a_2 + t_1 u_2 + t_2 v_2 \\ z &= a_3 + t_1 u_3 + t_2 v_3 \end{aligned}$$

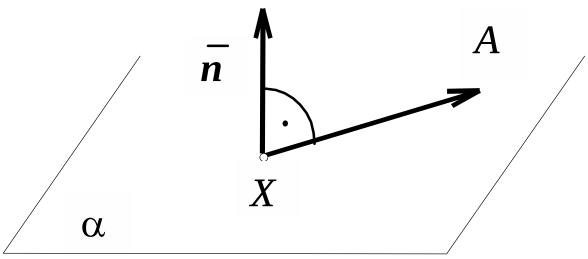
nazýváme *parametrické rovnice roviny*.

Definice:

Rovnici $ax + by + cz + d = 0$ nazýváme *obecnou rovnicí roviny*.

Z obecné rovnice roviny snadno zjistíme, jaké body v této rovině leží - jsou to všechny ty, jejichž souřadnice tuto rovnici splňují. Zajímavější a složitější bude zjistit, jak pro zadanou rovinu, určíme její obecnou rovnici. Stejně jako v předcházející kapitole, kdy jsme hledali obecnou rovnici přímky, k tomu budeme využívat normálový vektor.

Rovina může být určena také vektorem $\overline{\boldsymbol{n}}$, který je na ni kolmý a který se nazývá *normálový vektor*. Tento vektor je kolmý na všechny vektory této roviny, tedy $\overline{AX} . \overline{\boldsymbol{n}} = 0$



Pokud je normálový vektor dán souřadnicemi $\overline{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$, pak skalární součin má tvar

$$a(x - a_1) + b(y - a_2) + c(z - a_3) = 0,$$

což můžeme přepsat

$$ax + by + cz - (aa_1 + ba_2 + ca_3) = 0.$$

Označíme výraz

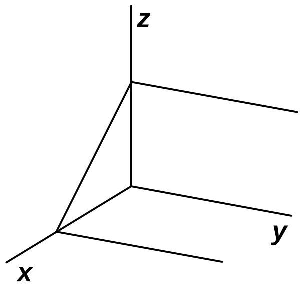
$$-(aa_1 + ba_2 + ca_3) = d$$

a dosadíme do rovnice

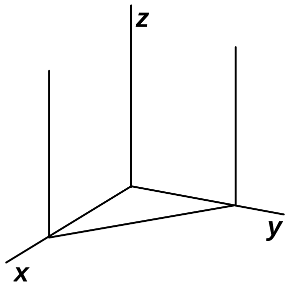
$$ax + by + cz + d = 0$$

Různé polohy roviny

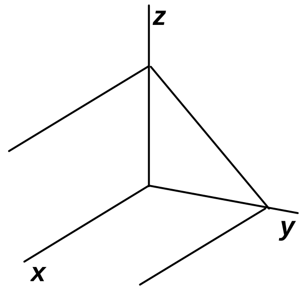
Rovina s rovnicí $ax + by + cz + d = 0$ může mít vzhledem k souřadnicovým osám různé polohy podle toho, jakých hodnot nabývají koeficienty *a, b, c, d* její rovnice. Neobsahuje-li rovnice roviny některou proměnnou (souřadnici), pak je daná rovina rovnoběžná s příslušnou osou, popřípadě touto osou prochází.



$ax + cz + d = 0$



$ax + by + d = 0$



$by + cz + d = 0$

Pokud $d = 0$, rovina prochází počátkem.

Bod leží v rovině, jestliže jeho souřadnice splňují její rovnici. To se nejsnadněji zjišťuje, je-li rovina dána obecnou rovnicí. Pokud máme zadané parametrické rovnice, převedeme je na obecnou rovnici roviny a pak zjišťujeme, zda bod v rovině leží.

Převod vektorové rovnice na obecnou

Je-li dána vektorová rovnice roviny, je tedy dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a dva směrové vektory $\bar{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$. Je-li $X = [x, y, z]$ libovolný bod roviny, pak vektory $\bar{\boldsymbol{u}}$, $\bar{\boldsymbol{v}}$, $\overline{AX}$ jsou komplanární, tedy jejich smíšený součin se rovná nule:

$$\overline{AX} . (\bar{\boldsymbol{u}} \times \bar{\boldsymbol{v}}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Výpočtem tohoto determinantu dostaneme obecnou rovnici roviny.

Příklad*:* Určete parametrickou a obecnou rovnici roviny dané třemi body $A = [1, 2, 3]$, $B = [1, 1, 0]$, $C = [-1, 0, 2]$.

Řešení*:* Tři body roviny určují dva směrové vektory

$\bar{\boldsymbol{u}} = \overline{AB} = (0, -1, -3)$,

$\bar{\boldsymbol{v}} = \overline{AC} = (-2, -2, -1)$.

Souřadnice postupně dosadíme do vektorové rovnice a dostaneme parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= 1 \phantom{{}- 3t_1} - 2t_2 \\ y &= 2 - t_1 - 2t_2 \\ z &= 3 - 3t_1 - t_2 \end{aligned}$$

Pomocí determinantu najdeme obecnou rovnici roviny

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Determinant počítáme pomocí Sarrusova pravidla nebo lépe rozvojem podle prvního řádku

$-5(x - 1) + 6(y - 2) - 2(z - 3) = 0$.

Po úpravě dostaneme obecnou rovnici roviny

$5x - 6y + 2z - 1 = 0$.

Příklad: Najděte rovnici roviny, která prochází bodem $A = [4, 2, 1]$ a je rovnoběžná s rovinou $x - 2y + 4z = 0$.

Řešení: Dvě rovnoběžné roviny mají stejný normálový vektor, proto rovina rovnoběžná s danou rovinou má tvar

$x - 2y + 4z + d = 0$.

Číslo d určíme z podmínky, že bod A je bodem roviny, tedy jeho souřadnice rovnici splňují

$4 - 4 + 4 + d = 0$.

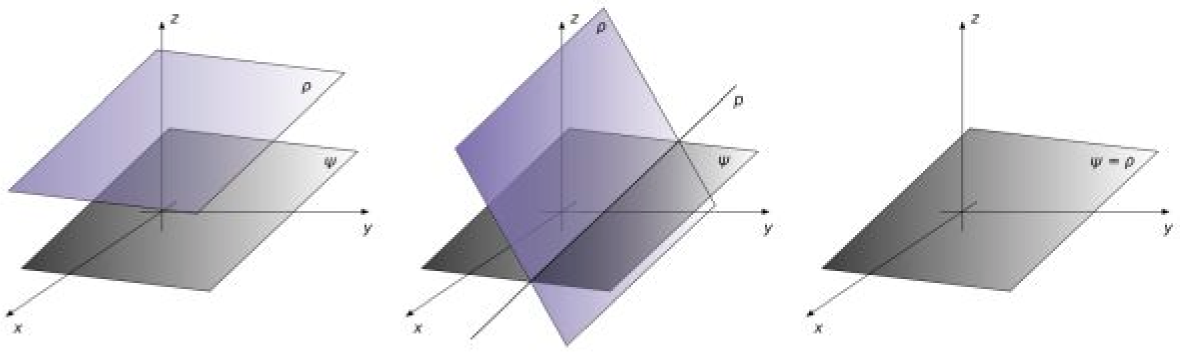
Z toho je $d = -4$.

Hledaná rovnice roviny je

$x - 2y + 4z - 4 = 0$.

Vzájemná poloha rovin

Dvě roviny



Mějme dvě roviny, které mají rovnice

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$,

$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Dvě různé roviny jsou rovnoběžné nebo různoběžné.

Rovnoběžné roviny nemají žádný společný bod. Jejich normálové vektory jsou rovnoběžné, tedy platí ,

$$a_1 = \lambda a_2,\ b_1 = \lambda b_2,\ c_1 = \lambda c_2,$$

kde λ je vhodné číslo.

Dvě různoběžné roviny mají společnou přímku (průsečnice). Odchylkou těchto rovin rozumíme ostrý úhel jejich normálových vektorů. Jeho kosinus se určí podle vzorce

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Příklad: Určete konstantu m tak, aby roviny $7x - 2y - z = 0$, $mx + y - 3z - 1 = 0$ byly na sebe kolmé.

Řešení: Kolmé roviny mají na sebe kolmé normálové vektory. Jejich skalární součin se musí rovnat nule.

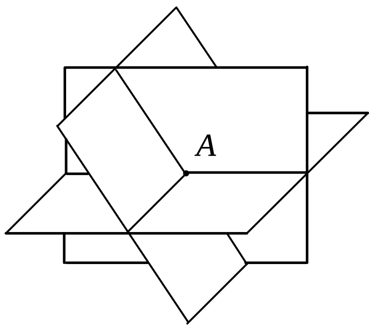
$$7m - 2 + 3 = 0,$$
$$7m = -1,$$
$$m = -\frac{1}{7}.$$

Dané roviny jsou kolmé pro $m = -\frac{1}{7}$.

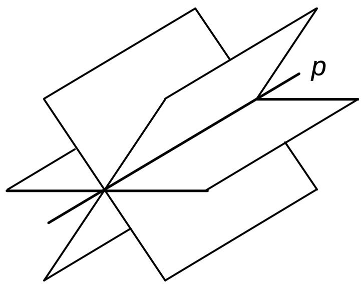
Tři roviny

Vyšetření vzájemné polohy tří různých rovin pomocí analytické geometrie souvisí s řešením soustavy tří rovnic o třech neznámých, protože souřadnice společného bodu musí vyhovovat rovnicím všech třech rovin. Rozlišujeme tři případy:

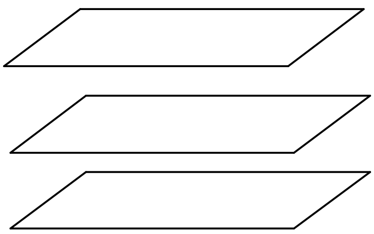
1. má-li soustava právě jedno řešení, mají roviny právě jeden společný bod (obr.1).
2. má-li soustava nekonečně mnoho řešení, mají roviny společnou jedinou přímku (obr.2).
3. nemá-li soustava řešení, nemají všechny tři roviny žádný společný bod (obr. 3a, 3b, 3c).



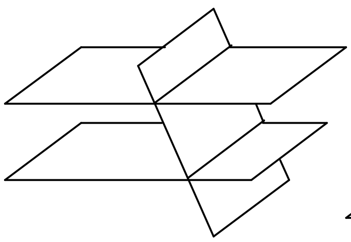
obr.1.



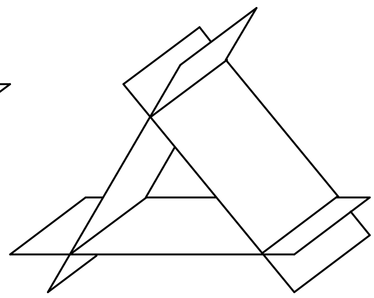
obr.2.



obr. 3a.



obr. 3b.



obr. 3c.