MA2, cvičení 9

1) Vypočtěte pomocí polárních, posunutých polárních nebo eliptických souřadnic:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^x \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je vymezena nerovnostmi

$$y \geq x, \quad y \leq \sqrt{3}x, \quad x^2+y^2 \geq x \;\text{ a }\; x^2+y^2 \leq 2x,$$

c) $\displaystyle\iint_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$, $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; \tfrac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x,\; x \leq x^2+y^2 \leq 3x\right\}$,

d) $\displaystyle\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; 1 \leq x^2+y^2 \leq \mathrm{e},\; y \geq 0\}$,

e) $\displaystyle\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; x \leq x^2+y^2 \leq 1,\; x \geq 0,\; y \geq 0\}$,

f) $\displaystyle\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je vymezena vztahy

$$x^2+y^2 \leq 4,\; x^2+y^2 \geq 2y,\; y \geq 0,\; x \geq 0,$$

g) $\displaystyle\iint_M (x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; \tfrac{x^2}{4}+y^2 \leq 1,\; 0 \leq x \leq \sqrt{12}y\right\}$,

h) $\displaystyle\iint_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\; x \leq y \leq \sqrt{3}x\right\}$,

i) $\displaystyle\iint_M \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\; x \geq 0,\; y \leq \tfrac{b}{a}x\right\},\; a,b>0,\; a \neq b,$$

j) $\displaystyle\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; \tfrac{x^2}{3}+\tfrac{y^2}{4} \leq 1,\; \tfrac{2}{\sqrt{3}}x \leq y \leq 2x\right\}$,

k) $\displaystyle\iint_M \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je zadána nerovnostmi

$$x \leq -1,\; y \leq 0,\; (x+1)^2+y^2 \leq 1,$$

ℓ) $\displaystyle\iint\limits_M x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je zadána nerovnostmi

$$0 \le 3y \le x,\ \ x^2 + 9y^2 \le 9,$$

m) $\displaystyle\iint\limits_M x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$,

n) $\displaystyle\iint\limits_M \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1,\ y \le x - 1\}$.

2) Substituujte do polárních souřadnic

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

3) Pomocí Fubiniovy věty pro trojný integrál vypočtěte:

a) $\displaystyle\iiint\limits_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,3\rangle \times \langle -1,0\rangle$,

b) $\displaystyle\iiint\limits_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ |x+1| \le 1,\ |y| \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$.

4) Použijte Fubiniovu větu, přičemž Ω je čtyřstěn o vrcholech $(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$:

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \overset{a)}{=} \underbrace{\int\left(\int\left(\int f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x}_{\text{vhodné meze}}$$

$$\overset{b)}{=} \underbrace{\int\left(\int\left(\int f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z.}_{\text{vhodné meze}}$$