MA2, cvičení 8

1) Zapište dvojný integrál $\iint\limits_M \mathrm{d}M$ jako dvojnásobný integrál, je-li

a) M trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(0,2)$, $(-1,2)$,

b) M výseč kruhu o poloměru 2 se středem v počátku nad osou x a pod přímkou $y = x$.

2) Vypočtěte

a) $\displaystyle\iint\limits_M 2xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le \frac{1}{2}, \ 0 \le y \le \sqrt{1-x}\right\}$,

b) $\displaystyle\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je omezená množina ohraničená grafy funkcí $y = 2x$ a $y = x^2$, přičemž použijte Fubiniovu větu, chápete-li M jednou jako elementární oblast 1. druhu a podruhé jako elementární oblast 2. druhu,

c) $\displaystyle\iint\limits_M \frac{\ln y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le \pi, \ \mathrm{e}^{-2x} \le y \le \mathrm{e}^{\cos x}\}$,

d) $\displaystyle\iint\limits_M \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le y \le \mathrm{e}, \ y \le x \le y^2\}$,

e) $\displaystyle\iint\limits_M (\sin x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je vymezena nerovnostmi $y \ge 0$, $x \ge 0$, $x \le \frac{\pi}{2}$, $y \le \cos x$,

f) $\displaystyle\iint\limits_M 4x^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je omezená a ohraničená grafy funkcí $y = (x-1)^2$ a $y = -x+3$,

g) $\displaystyle\iint\limits_M (2x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ x + y \le 3\}$,

h) $\displaystyle\iint\limits_M xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 4y^2 \le 1, \ x \ge 0\}$,

i) $\displaystyle\iint\limits_M \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{\pi}{2})$,

j) $\displaystyle\iint\limits_M x^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \ge x^3, \ y \le x, \ x \ge 0\}$,

k) $\displaystyle\iint\limits_M \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, M je omezená oblast ohraničená křivkami $y = x^2$, $xy = 8$ a přímkou $y = 1$, přičemž použijte Fubiniovu větu, chápete-li M jednou jako elementární oblast 1. druhu a podruhé jako elementární oblast 2. druhu.

3) Pomocí substituce do polárních souřadnic vypočtěte

a) $$\iint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le a^2\right\},\ a\in\mathbb{R}^+,$$

b) $$\iint\limits_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \pi^2\le x^2+y^2\le(4\pi)^2\},$$

c) $$\iint\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\le 2x,\ y\ge x\}.$$

4) Substituujte do polárních souřadnic:

a) $$\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

b) $$\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$