MA2, cvičení 6

1) Funkce g (o rovnici $y = g(x)$) je implicitně určená rovnicí $f(x,y) = 0$ a podmínkou $g(a) = b$. Vypočtěte $g'(a)$.

a) $f(x,y) = \sin(xy) - x + y$, $a = 0$, $b = 0$,

b) $f(x,y) = x \sin y - y \cos x$, $a = \frac{\pi}{4}$, $b = -\frac{\pi}{4}$.

2) Funkce g (o rovnici $y = g(x)$) je implicitně určená rovnicí $f(x,y) = 0$ a podmínkou $g(a) = b$. Vypočtěte $g'(a)$ a $g''(a)$.

a) $f(x,y) = y^2 - 2xy - x^2 - 16$, $a = 0$, $b = 4$,

b) $f(x,y) = y - x - \ln y$, $a = \mathrm{e} - 1$, $b = \mathrm{e}$.

3) Najděte všechny globální extrémy funkce f na množině M, je-li

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1, \; y \geq |x| - 1\}$,

b) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 4xy - 6x - 1$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x + y \leq 4\}$,

c) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 9\}$.

4) Najděte kvádr bez víka daného objemu 32 litrů tak, aby měl minimální povrch.

5) Mezi všemi kvádry s úhlopříčkou $2\sqrt{3}$ vyberte ten, který má největší objem.

6) Na parabole $y = \frac{1}{5}(x-1)^2$ najděte bod, který je neblíže bodu $(1,2)$.