MA2, cvičení 3

1) Vypočtěte diferenciál funkce f v bodě c, je-li

a) $f(x,y) = y^2 + x^2$, $c = (1,1)$,

b) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$, $c = (1,1,1)$.

2) Ukažte, že $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ je spojitá v bodě $(0,0,0)$, ale není v tomto bodě diferencovatelná.

3) Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně hodnotu

a) $\frac{4{,}1}{1{,}95}$,

b) $\ln\left(\sqrt{1{,}03} - \sqrt[3]{0{,}96} + \sqrt[3]{1{,}05}\right)$.

4) Obdélník má délky stran x a y. Pomocí diferenciálu aproximujte obsah obdélníku pro $x = 2{,}1$ a $y = 2{,}8$.

5) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v dotykovém bodě $(c, f(c))$, je-li

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $c = (2,1)$,

b) $f(x,y) = 1 - x - y$, $c = (1,1)$.

6) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce f, která je rovnoběžná s rovinou ρ, je-li

a) $f(x,y) = 2x^2 - y$, $\rho:\ 8x - 6y - z - 2024 = 0$,

b) $f(x,y) = x^2 + 2xy + e^{x+y}$, $\rho:\ x + y - z + 10 = 0$.

7) Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ukažte, že

a) f je spojitá v bodě $(0,0)$,

b) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,

c) f_x je nespojitá v bodě $(0,0)$,

d) f není diferencovatelná v bodě $(0,0)$,

e) všechny směrové derivace funkce f v bodě $(0,0)$ existují.