

MA2, cvičení 2

1) Určete a znázorněte Df a vrstevnice funkce f v \mathbb{R}^2 a načrtněte graf f v \mathbb{R}^3 , je-li

- a) $f(x, y) = y^2 - x^2$,
- b) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$,
- c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$,
- d) $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$,
- e) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.

2) Vypočtete limitu funkce f bodě $(0, 0)$, je-li

- a) $f(x, y) = \frac{2xy^2}{3x^2 + y^4}$,
- b) $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{\operatorname{tg}(x^2 + y)}$,
- c) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3) Vypočtete všechny první parciální derivace funkce f , je-li

- a) $f(x, y) = 2x^2y^3 - 3x^2y^2 + 2x^2 + 3y^2 + 1$,
- b) $f(x, y) = e^x \cos y + e^y \sin x$,
- c) $f : z = xe^{xy^2}$,
- d) $f : z = y^x$,
- e) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{y})$,
- f) $f(x, y, z) = x \ln(x + y^2) + z^3$,
- g) $f(x, y, z) = x^{(y^z)}$,
- h) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$,
- i) $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$,
- j) $f(x, y) = x^{xy}$.

4) Vypočtete parciální derivace f_x a f_w , je-li

$$f(x, y, z, w) = \frac{xw^2}{y + \sin(zw)}.$$

5) Dokažte, že platí $f_x(0, 0) + f_y(0, 0) = 0$ pro

$$f(x, y) = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}.$$

6) Dokažte, že platí $y^2 f_x + xy f_y = 2xf$ pro

$$f(x, y) = y^2 \sin(x^2 - y^2).$$

7) Dokažte, že platí $y f_x = x f_y$ pro

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$$

8) Nechť

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ukažte, že obě parciální derivace f v bodě $(0, 0)$ existují, ale f je nespojitá v $(0, 0)$.

9) Nechť

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ukažte, že obě parciální derivace f v bodě $(0, 0)$ existují a f je spojitá v $(0, 0)$.

10) Nechť

$$f(x, y) = x^2 + y + \operatorname{sgn}|xy|.$$

Ukažte, že obě parciální derivace f v bodě $(0, 0)$ existují, ale f je nespojitá v $(0, 0)$.

11) Nechť

$$f(x, y) = |x|.$$

Ukažte, že $f_y(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0)$ neexistuje a f je spojitá v $(0, 0)$.

12) Nechť

$$f(x, y) = |y|.$$

Ukažte, že obě parciální derivace f v bodě $(0, 1)$ existují a f je spojitá v $(0, 1)$.

13) Nechť

$$f(x, y) = \begin{cases} \pi & \text{pro } y = 0, \\ 0 & \text{pro } y \neq 0. \end{cases}$$

Ukažte, že $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0)$ neexistuje a f je nespojitá v $(0, 0)$.

14) Vypočtěte všechny druhé parciální derivace funkce f , je-li

a) $f(x, y) = \sin(xy)$,

b) $f(x, y) = x \sin^2 y + y^2 \cos x$,

c) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

15) Nechť

$$f(x, y, z) = x^2y^3 - y^2z^3.$$

Vypočtěte f_{xyz} , f_{yzx} , f_{zyx} a f_{xyx} .

16) Nechť

$$f(x, y) = \ln \|(x, y)\|,$$

kde $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ukažte, že $f_{xx} + f_{yy} = 0$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

17) Nechť

$$f(x, y, z) = e^x \sin y + z.$$

Ukažte, že $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.