

MA2, cvičení 10

1) Pomocí Fubiniovy věty pro trojný integrál vypočtěte:

a) $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$,

b) $\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + y + z \leq 2\}$,

c) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z^2 + x^2, y \leq 8 - x^2 - z^2\}$,

d) $\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, z \leq x^2 + y^2, z \geq 0\}$, $R \in \mathbb{R}^+$,

e) $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, Ω je omezená oblast ohraničená rovinou $z = 0$, plochou $y = x^2$ a rovinou $y + z = 1$,

f) $\iiint_{\Omega} \frac{z}{9 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \, dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq \frac{3}{2}, z \leq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$,

g) $\iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz$, Ω je omezená oblast ohraničená pomocí ploch $y = x^2 + z^2$, $y = 4$,

h) $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 3z\}$,

i) $\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^3 + y \leq 1, z \leq x\}$,

j) $\iiint_{\Omega} xyz \, dx \, dy \, dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq xy, y \geq x \geq 0, y \leq 1, z \geq 0\}$,

k) $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y \geq x^3 \geq 0, z \leq 0, z \geq -2x\}$,

l) $\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, x^2 + y^2 \geq z^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

2) Pomocí substituce do válcových souřadnic vypočtěte

a) $\iiint_{\Omega} dx dy dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, z \leq x^2 + y^2, z \geq 0\}$, $R \in \mathbb{R}^+$,

b) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4z^2, 0 \leq z \leq 1\}$,

c) $\iiint_{\Omega} y dx dy dz$, Ω je omezená oblast ohraničená plochou $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ a rovinou $z = 0$.