Pár poznámek k limitě posloupnosti

nedefinujeme: $+\infty - \infty,\ -\infty + \infty,\ 0 \cdot (\pm\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{k}{0}$ pro $k \in \mathbb{R}^*$

pozor: $\frac{k}{\pm\infty} = 0$ pro $k \in \mathbb{R}$

Věta 1 Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 2 (o limitě vybrané posloupnosti)

$$\left.\begin{array}{r} \lim a_n = a \in \mathbb{R}^* \\ (a_{k_n}) \text{ je vybraná posloupnost z } (a_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_{k_n} = a$$

Věta 3 Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. Pak

- $\lim |a_n| = |a|$,
- $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$, má-li pravá strana smysl,
- $\lim(a_n b_n) = ab$, má-li pravá strana smysl,
- $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, má-li pravá strana smysl a $\forall n \in \mathbb{N}:\ b_n \neq 0$,
- $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, je-li $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ a \in \mathbb{R}$ a $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq 0$.

Věta 4 (o limitě sevřené posloupnosti)

$$\left.\begin{array}{r} \lim a_n = \lim b_n = a \in \mathbb{R}^* \\ \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N} \text{ platí } a_n \leq c_n \leq b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim c_n = a$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim a_n = \infty \\ \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N} \text{ platí } b_n \geq a_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim b_n = \infty$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim a_n = -\infty \\ \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N} \text{ platí } b_n \leq a_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim b_n = -\infty$$

Je užitečné vědět, že:

- $\lim(-1)^n$ neexistuje (plyne z věty o vybrané posloupnosti),
- $\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$ (plyne přímo z definice limity posloupnosti),
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$,
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (plyne především z věty o sevřené posloupnosti),
- $\lim q^n = \begin{cases} \infty & \text{pro } q \in (1, \infty), \\ 1 & \text{pro } q = 1, \\ 0 & \text{pro } q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \in (-\infty, -1\rangle\,. \end{cases}$