Pár poznámek k limitě funkce

Věta 1 Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

Věta 2 Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, má-li pravá strana smysl,
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, má-li pravá strana smysl,
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, má-li pravá strana smysl.

Věta 3 Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^*$, pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = a.$$

Věta 4 (o limitě sevřené funkce)

$$\left.\begin{array}{r} x_0, a \in \mathbb{R}^* \\ \exists P(x_0): \ f \leq h \leq g \text{ na } P(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = a$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Věta 5

$$\left.\begin{array}{r} x_0 \in \mathbb{R}^* \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \\ \exists P(x_0): \ g \text{ je omezená na } P(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = 0$$

Věta 6 (o limitě složené funkce)

$$\left.\begin{array}{r} x_0 \in \mathbb{R}^*,\ a \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \\ f \text{ je spojitá v } a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(a)$$

Věta 7 (o limitě složené funkce)

$$\left.\begin{array}{r} a, b, x_0 \in \mathbb{R}^* \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a, \quad \lim\limits_{y \to a} f(y) = b \\ \exists P(x_0):\ g \text{ nenabývá hodnoty } a \text{ na } P(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = b$$

Věta 8

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = 0 \\ \exists P^+(x_0):\ f \text{ je kladná na } P^+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0+} \frac{1}{f(x)} = \infty,$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = 0 \\ \exists P^+(x_0):\ f \text{ je záporná na } P^+(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0+} \frac{1}{f(x)} = -\infty,$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = 0 \\ \exists P^-(x_0):\ f \text{ je kladná na } P^-(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0-} \frac{1}{f(x)} = \infty,$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = 0 \\ \exists P^-(x_0):\ f \text{ je záporná na } P^-(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0-} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$