2. cvičení

1) Dokažte pomocí matematické indukce:

a) $\forall n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$,

b) $\forall n \in \mathbb{N}: \ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$,

c) $\forall n \in \mathbb{N}: \ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$,

d) $\forall n \in \mathbb{N}: \ 5 \,|\, n^5 - n$,

e) $\forall n \in \mathbb{N}: \ n \geq 5 \ \Rightarrow \ 2^n > n^2$.

2) Řešte v $\mathbb{R}$:

a) $-x^2 - x + 2 \geq 0$,

b) $5 + \sqrt{x^2 - 5} = x$,

c) $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 10x + 21} < 0$,

d) $|2x + 1| \leq |x - 3|$,

e) $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16$,

f) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-3}{x+3} > 0$,

g) $\cos x + \operatorname{cotg} x = 1 + \sin x$.

3) Uvažujme A, $B \subset \mathbb{R}^*$. Dokažte:

a) A má alespoň 2 prvky $\quad \Leftrightarrow \quad \inf A < \sup A$,

b) $\sup (A \cup B) = \max \{\sup A, \sup B\}$,

c) $\inf (A \cup B) = \min \{\inf A, \inf B\}$.

4) Rozhodněte o omezenosti množiny M, je-li:

a) $M = \left\{ \frac{p}{q} : \ p \in \mathbb{N}, \ q \in \mathbb{N}, \ p \leq q \right\}$,

b) $M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ 4x^2 + 4x + 1 > 0 \right\}$,

c) $M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \right\}$.