1. cvičení

1) Zapište symbolicky:

a) „Platí *nejvýše jeden* z výroků A, B.“,

b) „Platí *právě jeden* z výroků A, B.“.

2) Rozhodněte o pravdivostní hodnotě kvantifikovaných výroků:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ :\; x^2 - x \geq 0$,

b) $\exists\, x \in \mathbb{R} :\; x^2 - 2x + 3 = 0$,

c) $\exists!\, x \in \mathbb{N} :\; \ln \mathrm{e}^{x-1} \leq 1$.

3) Rozhodněte o pravdivostní hodnotě kvantifikovaných výroků:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, y \in \mathbb{R} :\; y > x$,
$\exists\, y \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} :\; y > x$,
$\forall\, x \in (0,1) \quad \exists\, y \in \mathbb{R} :\; y > x$,
$\exists\, y \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in (0,1) :\; y > x$,

b) $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, y \in \mathbb{R} :\; x^2 + y^2 = 1$,
$\exists\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} :\; x^2 + y^2 = 1$,
$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} :\; x^2 + y^2 = 1$,
$\exists\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, y \in \mathbb{R} :\; x^2 + y^2 = 1$,

c) $\forall\, x \in \mathbb{N} \quad \exists\, y \in \mathbb{N} :\; 3x - y = 0$,
$\forall\, x \in \mathbb{N} \quad \exists\, y \in \mathbb{N} :\; x - 3y = 0$,
$\exists\, x \in \mathbb{N} \quad \exists!\, y \in \mathbb{N} :\; x + y = 15$,
$\exists!\, x \in \mathbb{N} \quad \exists\, y \in \mathbb{N} :\; x + y = 15$,

d) $\exists!\, m \in \mathbb{N} \quad \exists!\, n \in \mathbb{N} :\; m > n$,
$\exists!\, n \in \mathbb{N} \quad \exists!\, m \in \mathbb{N} :\; m > n$.

4) Negujte:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, y \in \mathbb{R} :\; y \leq x$,

b) $\exists!\, x \in \mathbb{R} :\; x^3 = -8$,

c) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\; \ln x > 0$.

5) Buď f kladná funkce definovaná na $\mathbb{R}^+$. Určete pravdivostní hodnotu výroků

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\; f(x) > 0 \qquad \text{a} \qquad \exists\, x \in \mathbb{R} :\; f(x) \leq 0$$

a upravte druhý tak, aby byl negací prvního.

6) Nechť
$$A = \{-1\} \quad \text{a} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \ 2x^2 + 4x + 2 \leq 0\}.$$
Určete, zda se tyto množiny rovnají.

7) Nechť
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ 6x - x^2 - 9 \geq 0\} \quad \text{a} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{2x-5}{x+2} < 3\right\}.$$
Určete $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B'_{\mathbb{R}}$.

8) Řešte v $\mathbb{R}$:

a) $5^{3x-2} \leq 25^{2x+1}$,

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{27}\right)^{x-1}$,

c) $\left|\frac{x-5}{x+1}\right| \leq 4$,

d) $x^4 - 3x^2 + 2x = 0$.