pro jednoduchost se omezíme na $\mathbb{R}^3$

norma vektoru x : $\boxed{\|x\| = \sqrt{f(x,x)}}$
(indukovaná skalárním součinem f)

pro Euklidovský skalární součin f: $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

$$\|x\| = \sqrt{f(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Euklidovská norma má význam klasické velikosti vektoru

Př a) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

Vypočtěte normu vektoru $(1,-1,1)$: $\|(1,-1,1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3\cdot 1^2} = \sqrt{1+1+3} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$

b) Vypočtěte Euklidovskou normu vektoru $(1,0,2)$:

$$\|(1,0,2)\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

Gram-Schmidtův ortonormalizační (ON) proces

máme zadánu bázi $G = \{g_1, g_2, g_3\}$	a máme vyrobit $\longrightarrow$	ortonormální bázi $E = \{e_1, e_2, e_3\}$

vše vzhledem k danému skal. součinu f

Co je to „ortonormální"?

1) $\underline{f(e_1,e_2)=0}$, $\underline{f(e_1,e_3)=0}$, $\underline{f(e_2,e_3)=0}$
(tzn. vektory e_1, e_2, e_3 jsou navzájem kolmé)

2) $\underline{f(e_1,e_1)=1}$, $\underline{f(e_2,e_2)=1}$, $\underline{f(e_3,e_3)=1}$
(tzn. vektory e_1, e_2, e_3 mají jednotkovou normu)

postup: 1) nejprve vytvoříme bázi $\{f_1, f_2, f_3\}$, jejíž vektory jsou navzájem kolmé:

- $f_1 = g_1$
- $f_2 = g_2 + \alpha \cdot f_1$ tak, aby $f(f_1, f_2) = 0$
- $f_3 = g_3 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ tak, aby $f(f_1, f_3) = 0$, $f(f_2, f_3) = 0$

f_2 je tedy kolmý k f_1

f_3 je tedy kolmý k f_1 i k f_2

f je daný skal. součin

2) normujeme vektory báze $\{f_1, f_2, f_3\}$ na „jednotkovou velikost":

- $e_1 = \dfrac{f_1}{\sqrt{f(f_1, f_1)}}$
- $e_2 = \dfrac{f_2}{\sqrt{f(f_2, f_2)}}$
- $e_3 = \dfrac{f_3}{\sqrt{f(f_3, f_3)}}$

normováním nepokazíme kolmost získanou v 1);
tj. $\{e_1, e_2, e_3\}$ je ortonormální bází $\mathbb{R}^3$

Př Pomocí Gram-Schmidtova ON procesu vytvořte ON bázi E z báze $G = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$. Předepsaný skal. součin:

$$\underset{g_1}{(1,1,0)},\ \underset{g_2}{(0,1,1)},\ \underset{g_3}{(1,0,1)}$$

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

1) • $f_1 = g_1 = (1,1,0)$

• $f_2 = g_2 + \alpha f_1 = (0,1,1) + \alpha(1,1,0)$ tak, aby $f(f_1, f_2) = 0$

$= (\alpha, 1+\alpha, 1)$

$$f((1,1,0), (\alpha, 1+\alpha, 1)) = 0$$

$$\alpha \cdot 1 + (1+\alpha)\cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$2\alpha = -1$$

$$\alpha = -1/2$$

$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

pro jednodušší výpočet dále vynásobíme f_2 dvojkou a přeznačíme:

$f_2 = (-1, 1, 2)$

• $f_3 = g_3 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = (1,0,1) + \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(-1,1,2)$ tak, aby

$= (1+\alpha_1-\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, 1+2\alpha_2)$

$$f(f_1, f_3) = 0,\ f(f_2, f_3) = 0$$

$$1\cdot(1+\alpha_1-\alpha_2) + 1\cdot(\alpha_1+\alpha_2) + 0\cdot(1+2\alpha_2) = 0$$
$$-1\cdot(1+\alpha_1-\alpha_2) + 1\cdot(\alpha_1+\alpha_2) + 2(1+2\alpha_2) = 0$$

$$1 + 2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1/2$$
$$1 + 6\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -1/6$$

$= \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{6}, 1+2\left(-\frac{1}{6}\right)\right)$

$= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

pro jednodušší výpočet dále vynásobíme f_3 trojkou a přeznačíme:

$f_3 = (2, -2, 2)$

2) Normujeme:

• $e_1 = \dfrac{f_1}{\sqrt{f(f_1,f_1)}} = \dfrac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

• $e_2 = \dfrac{f_2}{\sqrt{f(f_2,f_2)}} = \dfrac{(-1,1,2)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$

• $e_3 = \dfrac{f_3}{\sqrt{f(f_3,f_3)}} = \dfrac{(2,-2,2)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{12}}(2,-2,2) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

$$\Rightarrow E = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \right\}$$

Př Pomocí Gram-Schmidtova ON procesu vytvořte ON bázi E z báze $G=\{(1,0,-1),(0,1,3),(0,1,-1)\}$. Předepsaný skal. součin:

$$\underbrace{(1,0,-1)}_{g_1},\ \underbrace{(0,1,3)}_{g_2},\ \underbrace{(0,1,-1)}_{g_3}$$

$$f(x,y)=x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3.$$

---

1) • $f_1=g_1=(1,0,-1)$

• $f_2=g_2+\alpha f_1=(0,1,3)+\alpha(1,0,-1)$ tak, aby $f(f_1,f_2)=0$

$=(\alpha,1,3-\alpha)$

$\Downarrow$

$f((1,0,-1),(\alpha,1,3-\alpha))=0$

$1\cdot\alpha+2\cdot0\cdot1+(-1)(3-\alpha)=0$

$\alpha-3+\alpha=0$

$\alpha=3/2$

$=\left(\frac{3}{2},1,\frac{3}{2}\right)$

přeznačíme: $f_2=(3,2,3)$

• $f_3=g_3+\alpha_1f_1+\alpha_2f_2=(0,1,-1)+\alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(3,2,3)$ tak, aby

$=(\alpha_1+3\alpha_2,1+2\alpha_2,-1-\alpha_1+3\alpha_2)$

$f(f_1,f_3)=0,\ f(f_2,f_3)=0$

$\Downarrow$

$1\cdot(\alpha_1+3\alpha_2)+2\cdot0\cdot(1+2\alpha_2)+(-1)\cdot(-1-\alpha_1+3\alpha_2)=0$

$3\cdot(\alpha_1+3\alpha_2)+2\cdot2\cdot(1+2\alpha_2)+3\cdot(-1-\alpha_1+3\alpha_2)=0$

$\alpha_1=-1/2 \quad \Leftarrow \quad \alpha_1+\cancel{3\alpha_2}+1+\alpha_1-\cancel{3\alpha_2}=0$

$\alpha_2=-1/26 \quad \Leftarrow \quad \cancel{3\alpha_1}+9\alpha_2+4+8\alpha_2-3-\cancel{3\alpha_1}+9\alpha_2=0$

$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{26},1-\frac{2}{26},-1+\frac{1}{2}-\frac{3}{26}\right)$

$=\left(\frac{-16}{26},\frac{24}{26},\frac{-16}{26}\right)=$

$=\left(-\frac{8}{13},\frac{12}{13},-\frac{8}{13}\right)$

přeznačíme: $f_3=(-2,3,-2)$

2) Normujeme:

• $e_1=\dfrac{(1,0,-1)}{\sqrt{1^2+2\cdot0+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt2}(1,0,-1)$

• $e_2=\dfrac{(3,2,3)}{\sqrt{3^2+2\cdot2^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}(3,2,3)$

• $e_3=\dfrac{(-2,3,-2)}{\sqrt{(-2)^2+2\cdot3^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}(-2,3,-2)$

$\Rightarrow \quad E=\left\{\frac{1}{\sqrt2}(1,0,-1),\frac{1}{\sqrt{26}}(3,2,3),\frac{1}{\sqrt{26}}(-2,3,-2)\right\}$

ZKOUŠKA KOLMOSTI:

$f(e_1,e_2)=\frac{1}{\sqrt2\sqrt{26}}(1\cdot3+2\cdot0\cdot2+(-1)\cdot3)=0$ ✓

$f(e_1,e_3)=\frac{1}{\sqrt2\sqrt{26}}(1\cdot(-2)+2\cdot0\cdot3+(-1)(-2))=0$ ✓

$f(e_2,e_3)=\frac{1}{26}(3(-2)+2\cdot2\cdot3+3\cdot(-2))=0$ ✓