

## Poznámky k 1. cvičení

imaginární jednotka  $i$ :  $i^2 = -1$  (řešení rovnice  $x^2 + 1 = 0$ )

---

algebraický tvar čísla  $z \in \mathbb{C}$ :  $z = x + iy$  ( $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$ )

číslo komplexně sdružené k číslu  $z$ :  $\bar{z} = x - iy$

absolutní hodnota (modul) čísla  $z$ :  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$  („vzdálenost od 0“)

pro  $z = x + iy$  platí:

- $z + \bar{z} = 2x$
- $z - \bar{z} = 2yi$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , je-li  $z \neq 0$ ; speciálně  $\frac{1}{i} = -i$

je užitečné si zafixovat:  $(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$

---

ztotožňujeme:  $x + iy \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tj.  $\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

---

pro  $z, w \in \mathbb{C}$  platí

- trojúhelníková nerovnost:  $|z + w| \leq |z| + |w|$
  - obrácená trojúhelníková nerovnost:  $|z - w| \geq ||z| - |w||$
- 

goniometrický (polární) tvar čísla  $z = x + iy \neq 0$ :  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}$$

$\varphi$  není jednoznačně určeno!

argument čísla  $z \neq 0$ :  $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}$

platí:  $\varphi \in \operatorname{Arg} z \Rightarrow \operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

hlavní hodnota argumentu čísla  $z \neq 0$ :  $\arg z = \text{Arg } z \cap (-\pi, \pi)$

násobení a dělení čísel v goniometrickém tvaru:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\varphi_1 \in \text{Arg } z_1, \varphi_2 \in \text{Arg } z_2$$

„násobení a dělení souvisí s rotací o daný úhel kolem počátku“

---

**Moivreova věta:**

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \varphi \in \mathbb{R}) : (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

---

rozšířená Gaussova (komplexní) rovina:  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

pro  $z \in \mathbb{C}$ :

- $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$
- $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ , je-li  $z \neq 0$
- $\frac{z}{0} = \infty$ , je-li  $z \neq 0$
- $\frac{z}{\infty} = 0$ ,  $\frac{\infty}{z} = \infty$
- $\infty^n = \infty$ ,  $\infty^{-n} = 0$ ,  $0^{-n} = \infty$ , je-li  $n \in \mathbb{N}$
- $|\infty| = \infty$ ,  $\overline{\infty} = \infty$

**nedefinujeme:**  $\infty \pm \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty \cdot 0$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\text{Arg } \infty$ ,  $\arg \infty$