Poznámky k primitivní funkci a nezávislosti na cestě

$$F:\ \mathbb{C}\mapsto\mathbb{C} \text{ je primitivní k funkci } f:\ \mathbb{C}\mapsto\mathbb{C} \text{ na oblasti } \Omega\subset\mathbb{C}$$
$$\Updownarrow \text{ def.}$$
$$\forall z\in\Omega:\quad F'(z)=f(z).$$

$$F \text{ je primitivní k } f \text{ na oblasti } \Omega$$
$$\Downarrow$$
funkce tvaru $F+k$, kde $k\in\mathbb{C}$, tvoří právě všechny primitivní funkce k f na Ω

Řekneme, že integrál funkce $f:\ \mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ nezávisí v oblasti $\Omega\subset\mathbb{C}$ na cestě, platí-li pro každé dvě po částech hladké křivky γ_1 a γ_2 takové, že

- $\langle\gamma_1\rangle\cup\langle\gamma_2\rangle\subset\Omega$,
- poč. bod γ_1 = poč. bod $\gamma_2 \overset{\text{ozn.}}{=} z_1$,
- konc. bod γ_1 = konc. bod $\gamma_2 \overset{\text{ozn.}}{=} z_2$,

rovnost
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{ozn.}}{=} \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

$$f:\ \mathbb{C}\mapsto\mathbb{C} \text{ je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti } \Omega\subset\mathbb{C}$$
$$\Downarrow$$
integrál funkce f nezávisí v oblasti Ω na cestě

Morerova věta Nechť $f:\ \mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ je spojitá na oblasti $\Omega\subset\mathbb{C}$ a nechť pro každou jednoduchou uzavřenou po částech hladkou křivku γ v oblasti Ω platí
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$
Pak f je holomorfní na Ω.

---

integrál spojité funkce $f:\ \mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ nezávisí v oblasti $\Omega\subset\mathbb{C}$ na cestě
$$\Downarrow$$
existuje primitivní funkce k f na Ω a navíc
$$\forall z_0\in\Omega:\quad F(z)\overset{\text{def.}}{=}\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \text{ je primitivní funkcí k } f \text{ na } \Omega$$

primitivní funkce k $f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ existuje

$$\Downarrow$$

integrál funkce f nezávisí v oblasti Ω na cestě

a navíc: je-li F primitivní funkcí k f na Ω a je-li γ po částech hladká křivka v Ω, je

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\text{konc. bod } \gamma) - F(\text{poč. bod } \gamma)$$